N° d'ordre

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE et MEDICALE

de GRENOBLE

pour obtenir le grade de

Docteur de Troisième Cycle en Mathématiques Appliquées

par

GUET Martine

Série-Parallélisation des Graphes

soutenue le 19 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

Monsieur	J.	Kuntzmann	Président
Messieurs	C.	Benzaken	Examinateurs
	H.	Raynaud	
Messieurs	C.	Berge	Invités
	M.	Chein	

N° d'ordre

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE et MEDICALE

de GRENOBLE

pour obtenir le grade de

Docteur de Troisième Cycle en Mathématiques Appliquées

par

GUET Martine

Série-Parallélisation des Graphes

soutenue le 19 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

Monsieur	J.	Kuntzmann	Président
Messieurs	C.	Benzaken	Examinateurs
	H.	Raynaud	
Messieurs	C.	Berge	Invités
	M.	Chein	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM.	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIARES Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM. CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie Organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur KUNTZMANN pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury.

Que Monsieur BERGE, Directeur de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, trouve ici l'expression de ma respectueuse gratitude, pour avoir honoré de sa présence la soutenance de cette thèse.

Je remercie très vivement Monsieur BENZAKEN, Maître de Conférences, d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Je remercie très vivement Monsieur CHEIN, Maître de Conférences, à qui je dois le sujet de cette thèse, de m'avoir aidée à entreprendre ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur RAYNAUD, Maître de Conférences, qui, par ses suggestions et ses encouragements tout au long de mes études, a su me donner le goût de la recherche mathématique. C'est grâce à ses conseils, ses critiques et ses précieuses indications, que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je tiens aussi à remercier Mademoiselle NAUDIN, ma Mère et le Service du tirage, dont le soin et la compétence ont constitué pour moi une aide précieuse.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION - 1

CHAPITRE I - RAPPELS - PROPRIETES - GRAPHES SERIES-PARALLELES ET HOMOMORPHISMES.

- Préliminaires 4
- Sous-graphes partiels d'un graphe SP 6
- Graphes série-parallèles et homomorphismes 8

CHAPITRE II - CONSTRUCTION DE SOUS-GRAPHES PARTIELS SERIE-PARALLELES MAXIMAUX D'UN GRAPHE DONNE 15

- I - Premier algorithme de construction 16
- II - Deuxième algorithme de construction 40
- III - Application des algorithmes à des graphes SP 50

CHAPITRE III- CONSTRUCTION DE FONCTIONS PARTIELLES PRIVILEGIEES MAXIMALES D'UNE FONCTION BOOLEENNE DONNEE F 51

A) Rappels et définitions 51
B) Sous-graphes partiels et fonctions partielles . 53
C) Enoncé et validité de l'algorithme III 62
D) Etude du cas particulier où F est une fonction booléenne associée à un graphe 80

CHAPITRE IV - NOMBRE MAXIMUM D'ARETES D'UN GRAPHE SP - ALGORITHMES DE CARACTERISATION DES GRAPHES SP.

- Calcul du nombre maximum d'arêtes d'un graphe SP simple, possèdant n sommets 83
- Algorithme de caractérisation des graphes SP (P_o, P_1) 88
- Caractérisation des graphes SP 92

.../...

.../...

CHAPITRE V - INVARIANT σ D'UN GRAPHE.

- Etude de l'invariant σ des graphes complets 97
- Etude de l'invariant σ de certains graphes bipartis complets 100
- Invariant σ des graphes W_n (n impair) 104
- Notations 108
- Propriétés 112
- Caractérisation des graphes 2 - σ - Critiques 117

CHAPITRE VI - CARACTERISATION DES GRAPHES D'INVARIANT σ EGAL A 2.

- Caractérisation de blocs d'invariant σ égal à 2. 120
- Première partie 121
- Deuxième partie 137
- Troisième partie 143
- Quatrième partie 187
- Cinquième partie 230
- Théorème de caractérisation 232
- Caractérisation des graphes d'invariant σ égal à 2 234

BIBLIOGRAPHIE 237

INTRODUCTION

Les réseaux série-parallèles présentent un grand intérêt dans de nombreux domaines : électricité, fiabilité, etc... Ils présentent une grand facilité de maniement et d'importantes propriétés mathématiques leur sont attachées. On peut les représenter par des graphes, que nous appellerons graphes série-parallèles (SP).

L'objet de cette thèse est d'établir des relations entre graphes SP et graphes quelconques. Plus précisément, nous nous proposons de présenter des techniques et des algorithmes permettant de transformer ou de décomposer des graphes quelconques en graphes série-parallèles.

Pour cela nous considérerons toujours des graphes non orientés dans lesquels nous privilègerons deux sommets que nous noterons P_o et P_1.

La première partie du chapitre I est consacrée à certains rappels concernant les graphes série-parallèles ; on y trouvera notamment deux définitions équivalentes des graphes série-parallèles relativement à deux de leurs sommets P_o et P_1 (ce que nous noterons graphes SP (P_o, P_1)).

La première est une définition récursive utilisant les opérations de mise en série et de mise en parallèle de deux graphes ; la seconde est une condition nécessaire et suffisante établie par ELGOT et WRIGHT et fondée sur la structure des chaînes élémentaires d'extrémités P_o et P_1.

Nous établissons ensuite, une condition nécessaire et suffisante de 2-connexité pour qu'un sous-graphe partiel d'un graphe SP (P_o, P_1) soit lui-même, SP (P_o, P_1).

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la détermination d'homomorphismes de graphes permettant de transformer un graphe G quelconque en un graphe série-parallèle par rapport à deux sommets fixés, P_o et P_1 de G.

Dans le second chapitre, étant donnés un graphe G quelconque et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe, nous établissons deux algorithmes nous permettant de construire des sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) maximaux (au sens de l'inclusion des graphes) de G. Ces algorithmes consistent en une construction par étapes successives. A chacune d'elles, nous considérons que nous avons déjà construit un sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) H de G, et nous cherchons à l'accroître (au sens de l'inclusion des graphes) en lui adjoignant une chaîne élémentaire γ de G disjointes de H, sauf en ses extrémités.

Associons à chaque arête de G une variable booléenne x_i ; à toute chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 de G nous faisons correspondre le monôme booléen dont les facteurs sont les variables booléennes associées aux différentes arêtes de cette chaîne ; nous pouvons ainsi associer à G une fonction booléenne qui n'est autre que la somme booléenne des monômes booléens associés à toutes les chaînes élémentaires de G d'extrémités P_o et P_1.

Cette remarque est à l'origine de l'établissement de l'algorithme de fonctions booléennes du chapitre III. En effet, en appelant fonctions privilégiées les fonctions booléennes associées à des graphes série-parallèles, les algorithmes du chapitre II, transcrits en termes de fonctions booléennes, permettent de construire une fonction partielle privilégiée maximale d'une fonction booléenne associée à un graphe quelconque. L'algorithme établi au chapitre III est, en fait, une généralisation de ces notions, puisqu'il permet de construire une fonction partielle privilégiée d'une fonction booléenne quelconque, que celle-ci puisse être associée à un graphe ou non.

Le chapitre IV nous permet de parfaire notre connaissance des graphes SP. Il fournit, notamment, une borne supérieure pour le nombre d'arêtes d'un graphe simple SP possédant n sommets. Nous y établissons, en outre, un algorithme nous permettant de déterminer (s'il existe) un couple de sommets d'un graphe quelconque G relativement auquel G soit série-parallèle.

Les chapitres V et VI sont consacrés à l'étude de la décomposition (en un sens que nous préciserons) des graphes quelconques en un nombre minimum de graphes série-parallèles.

Pour cela, au chapitre V, étant donnés un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G, nous définissons un invariant $\sigma(P_o, P_1)$ (G), cardinal minimum d'un recouvrement des chaînes élémentaires d'extrémités P_o et P_1 de G par des sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) ; on dit qu'un ensemble de graphes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ recouvre une chaîne élémentaire de G si et seulement si il existe un indice i, $1 \leq i \leq n$ tel que G_i contienne cette chaîne. Après avoir calculé l'invariant de certains graphes particuliers, nous établirons quelques propriétés de cet invariant. Nous montrerons, notamment, que σ est décroissant au sens suivant :

$$\left.\begin{array}{l} H \subset G \\ P_o, P_1 \in H \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_{(P_o, P_1)}\ (H) \leq \sigma_{(P_o, P_1)}\ (G)$$

Cette propriété nous conduira à la définition de graphes σ-critiques.

Nous caractériserons les graphes 2-σ-critiques ; mais, bien que pour tout p, $p > 2$, nous sachions exhiber des graphes p - σ - critiques, nous considérons comme question ouverte la caractérisation de ces graphes.

Nous remarquerons que, dans la détermination de l'invariant $\sigma(P_o, P_1)$ d'un graphe G, seules interviennent les arêtes contenues dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 de G ; c'est pourquoi nous nous intéresserons uniquement, au chapitre VI, aux graphes G tels que toute arête soit contenue dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 de G. Dans ces conditions, les graphes d'invariant 1 sont les graphes SP (P_o, P_1).

Le chapitre VI constitue l'essentiel de ce travail et est consacré à la caractérisation des graphes d'invariant σ égal à 2 ; nous déterminerons trois classes de blocs d'invariant 2 à partir desquels nous pourrons caractériser tous les graphes d'invariant σ égal à 2. Nous avons tout lieu de penser que, par des méthodes similaires, il serait possible de caractériser les graphes d'invariant σ égal à 3, puis, de proche en proche, les graphes d'invariant σ quelconque. Toutefois, la complexité des démonstrations et le grand nombre de cas à examiner incitent à penser que ces méthodes ne sont pas adéquates à la caractérisation des graphes d'invariant σ supérieur ou égal à 3 ; nous ne traiterons donc pas, ici, ce problème.

CHAPITRE I

RAPPELS - PROPRIETES

GRAPHES SERIE - PARALLELES ET HOMOMORPHISMES

PRELIMINAIRES

Tous les graphes considérés sont non orientés.

G étant un graphe, on note :

X (G) l'ensemble des sommets de G

E (G) l'ensemble des arêtes de G

m (G) le cardinal de l'ensemble E (G).

Nous utiliserons les définitions et notations suivantes :

(cf. Calvin C. Elgot et Jesse B. Wright - Duke Math. J. V. 28, 1959 p. 325 - 338).

Etant donnés un graphe G' et deux sommets p'_o et p'_1 de G' : $p'_o \neq p'_1$

un graphe G" et deux sommets p''_o et p''_1 de G" : $p''_o \neq p''_1$

un graphe G et deux sommets p_o et p_1 de G : $p_o \neq p_1$

G sera appelé connexion en série de G' et G" relativement à p_o, p'_1, p_1 si et seulement si :

$$p_o = p'_o \; ; \; p_1 = p''_1 \; ; \; p'_1 = p''_o \; ; \; X(G') \cap X(G'') = \{p'_1\}$$

$$X(G) = X(G') \cup X(G'') \; ; \; E(G) = E(G') \cup E(G'')$$

On notera en abrégé : $G = G' \; S \; G''$ (p_o, p'_1, p_1)

G sera appelé connexion en parallèle de G' et G" relativement à p_o et p_1 si et seulement si :

$$p_o = p'_o = p''_o \; ; \; p'_1 = p''_1 = p_1 \; ; \; X(G') \cap X(G'') = \{p_o, p_1\}$$

$$X(G) = X(G') \cup X(G'') \; ; \; E(G) = E(G') \cup E(G'')$$

On notera en abrégé : $G = G' \; P \; G''$ (p_o, p_1)

Définition - La classe des graphes série-parallèles (notés graphes SP) est la plus petite classe C de graphes contenant K_2 et tous les graphes isomorphes à K_2 et vérifiant :

$$(G_1, p_o^1, p_1^1), (G_2, p_o^2, p_1^2) \in C \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_1 \; P \; G_2 \in C \\ (p_o^1, p_1^1) \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_1 \; S \; G_2 \in C \\ (p_o^1, p_1^1, p_1^2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Notations : Etant donné un triplet (G, p_o, p_1) où $p_o, p_1 \in X(G)$; $p_o \neq p_1$; nous définissons une relation binaire L sur X (G).

a et b étant deux sommets de G, a L b signifie qu'il existe une chaîne élémentaire Γ allant de p_o à p_1 qui passe par a et b et telle que, lorsqu'on parcourt Γ en partant de p_o, b soit le sommet rencontré immédiatement après a.

ELGOT et WRIGHT ont donné une caractérisation des graphes SP.

Soit un graphe G et deux sommets p_o et p_1 de ce graphe.
L désignant la relation binaire associée au triplet (G, p_o, p_1), G est SP relativement à p_o et p_1 (noté $SP_{(p_o, p_1)}$) si et seulement si :

- G n'a pas de sommet isolé
- $\forall a, b \in X(G)$, $[a, b] \in E(G) \Rightarrow$ (a L b) ou (b L a)
- L est asymétrique.

* On rappelle que L asymétrique signifie : $\forall a, b \in X(G)$, a L b $\Rightarrow$ non (b L a).

Nous prendrons souvent cette propriété caractéristique pour définition des graphes $SP_{(p_o, p_1)}$. On pourra encore l'exprimer en disant que toute arête [a, b] de G, sans sommet isolé, est contenue dans une chaîne allant de p_o à p_1 et si l'une de ces chaînes décrite de p_o vers p_1 rencontre a et b dans cet ordre, il en est de même de toutes les autres.

SOUS-GRAPHES PARTIELS D'UN GRAPHE SP

Propriété - Soit H un sous-graphe partiel d'un graphe G SP (p_o, p_1)

$|X(H)| \geq 3$. $p_o, p_1 \in H$

Alors :

H est $SP_{(p_o,p_1)} \Leftrightarrow H \cup [p_o, p_1]$ est 2-connexe.

* $H \cup [p_o, p_1]$ désigne le graphe déduit de H par adjonction de l'arête $[p_o, p_1]$ si H ne la contient pas.

Soient L_G et L_H les relations binaires associées respectivement aux triplets (G, p_o, p_1) et (H, p_o, p_1).

Rappelons que pour tout couple (a,b) de sommets de G (resp. de H), a L_G b (resp. a L_H b) si et seulement si il existe une chaîne élémentaire de G (resp. de H) allant de p_o à p_1 qui passe par a et b et telle que, lorsqu'on parcourt cette chaîne de p_o vers p_1, b soit le sommet rencontré immédiatement après a.

1) Montrons que si $H \cup [p_o, p_1]$ est 2-connexe, alors H est $SP_{(p_o,p_1)}$ -

Puisque G est $SP_{(p_o,p_1)}$, on a

$\forall (a,b) \in X(G) \times X(G)$, non (a L_G b et b L_G a), et donc

$\forall (a,b) \in X(H) \times X(H)$, non (a L_H b et b L_H a) (1)

Considérons une arête e de H distincte de $[p_o, p_1]$. $H \cup [p_o, p_1]$ étant 2-connexe, $[p_o, p_1]$ et e se trouvent sur un même cycle élémentaire C_e.

$C_e - [p_o, p_1]$ (graphe déduit de C_e par la suppression de l'arête $[p_o, p_1]$) forme alors une chaîne élémentaire de H, allant de p_o à p_1 et contenant e.

Soient c et d deux sommets quelconques de X (H), tels que $[c, d]$ appartienne à E (H) et soit distincte de $[p_o, p_1]$; $C_{[c,d]} - [p_o, p_1]$ est alors une chaîne de H allant de p_o à p_1 et contenant $[c, d]$. Par suite : c L_H d ou d L_H c.

Enfin, si $[p_o, p_1] \in E(H)$, nous avons évidemment p_o L_H p_1, et donc toute arête $[c, d]$ de E (H) vérifie

$$c L_H d \text{ ou } d L_H c \quad (2)$$

(1) et (2) nous permettent d'écrire

$\forall (a, b) \in X(H) \times X(H)$, $[a, b] \in E(H) \Rightarrow (a\ L_H\ b)$ ou $(b\ L_H\ a)$ ("ou" ayant ici un sens exclusif).

H est donc $SP_{(p_o, p_1)}$.

2) Montrons que si H est un graphe $SP_{(p_o, p_1)}$, alors $H \cup [p_o, p_1]$ est 2-connexe -

Puisque H possède au moins 3 sommets, il suffit de montrer que deux arêtes quelconques e_1 et e_2 sont contenues dans un même cycle élémentaire de $H \cup [p_o, p_1]$.

Nous distinguons les deux cas suivants :

1er cas - Il existe une chaîne élémentaire Γ allant de p_o à p_1 et contenant e_1 et e_2.

Dans ce cas e_1 et e_2 sont distinctes de $[p_o, p_1]$ et le sous-graphe partiel $\Gamma \cup [p_o, p_1]$ de $H \cup [p_o, p_1]$ est le cycle élémentaire cherché.

2ème cas - Il n'existe pas de chaîne élémentaire allant de p_o à p_1 et contenant à la fois e_1 et e_2.

$H \cup [p_o, p_1]$ étant $SP_{(p_o, p_1)}$, il existe deux chaînes élémentaires distinctes Γ_1 et Γ_2 allant de p_o à p_1 vérifiant $e_1 \subset \Gamma^1$, $e_2 \not\subset \Gamma^1$

$e_2 \not\subset \Gamma^1$, $e_2 \subset \Gamma^2$

Il existe une sous-chaîne γ_1 de Γ_1 unique, contenant e_1 et dont l'intersection avec Γ^2 est formée des extrémités de γ_1.

Soient u et v les extrémités de γ_1, et γ_2 la sous-chaîne de Γ^2 d'extrémités u et v.

$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ et $e_1 \not\subset \Gamma_2$ implique $\gamma_1, \gamma_2 \neq \emptyset$

Nous avons $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{u, v\}$

$\Gamma_2 - \gamma_2$ désigne le graphe déduit de Γ_2 par suppression des arêtes et des sommets de γ_2, à l'exception des deux sommets u et v. Si γ_2 ne contenait pas e_2, $(\Gamma_2 - \gamma_2) \cup \gamma_1$ serait une chaîne élémentaire allant de p_o à p_1 et contenant e_1 et e_2, ce qui est impossible dans ce deuxième cas. Par suite e_2 est contenue dans γ_2 et $\gamma_1 \cup \gamma_2$ est un cycle élémentaire de $H \cup [p_o, p_1]$ contenant e_1 et e_2.

GRAPHES SERIE-PARALLELES ET HOMOMORPHISMES

Nous appellerons graphe pseudo-SP (noté P S P) un graphe non orienté tel que lorsqu'on supprime ses boucles, le graphe obtenu est SP.

L'objet de ce chapitre est de montrer comment, par des homomorphismes, on peut transformer un graphe connexe quelconque en graphe PSP.

Soit donc G = (X, E), un graphe connexe quelconque (il peut posséder des boucles et des arêtes multiples) et deux sommets p_o et p_1 de ce graphe ; a et b désignent deux sommets quelconques de G; on notera $\varepsilon_{(a,b)}$ l'homomorphisme élémentaire qui identifie a et b et transforme G = (X, E) en G' = (X', E'). $\varepsilon_{(a,b)}$ est défini par l'application (que nous notons également $\varepsilon_{(a,b)}$) de X sur X' vérifiant

- $\varepsilon_{(a,b)}(a) = \varepsilon_{(a,b)}(b)$
- $\varepsilon_{(a,b)}$ est une bijection de $X - \{a,b\}$ sur $X' - \{\varepsilon_{(a,b)}(a)\}$
- $\forall u, v \in X, [u,v] \in E \Rightarrow [\varepsilon_{(a,b)}(u), \varepsilon_{(a,b)}(v)] \in E'$
- $\forall u', v' \in X', [u', v'] \in E' \Rightarrow \exists u, v \in X, u' = \varepsilon_{(a,b)}(u)$
  $v' = \varepsilon_{(a,b)}(v), [u,v] \in E$

Remarque - D'après la définition de $\varepsilon_{(a,b)}$, si a et b sont deux sommets adjacents de G, dans le graphe G' il y une boucle au sommet $\varepsilon_{(a,b)}(a) = \varepsilon_{(a,b)}(b)$.

* Pour simplifier les notations nous noterons les sommets de G et ceux de $\varepsilon_{(a,b)}(G)$ de la même manière, en notant avec la même lettre un sommet de G et son image dans $\varepsilon_{(a,b)}(G)$; u étant un sommet de G, nous n'écrirons plus $\varepsilon_{(a,b)}(u)$, mais simplement u.

* Dans la suite L désignera la relation binaire précédemment définie.

Etant donnés un graphe connexe quelconque G et deux sommets p_o et p_1 de ce graphe, on peut rendre G $PSP_{(p_o,p_1)}$ au moyen de l'algorithme suivant :

1°) On considère l'ensemble W des couples de sommets adjacents (a,b), $a \neq b$, de G tels que l'on ait $a \mathrel{L} b$ et $b \mathrel{L} a$.

$$W = \{(a,b) \;/\; [a,b] \in E(G),\ a \neq b,\ a \mathrel{L} b \text{ et } b \mathrel{L} a\}$$

On note $w_1, w_2, \ldots, w_p$ les éléments de W. On transforme G par l'homomorphisme

$$G \to G' = \varepsilon w_p \circ \varepsilon w_{p-1} \circ \ldots \circ \varepsilon w_j \circ \ldots \circ \varepsilon w_1 \,(G)$$

2°) On considère l'ensemble V des couples de sommets adjacents (a,b), $a \neq b$, de G' tels que l'on ait, non ($a \mathrel{L} b$ ou $b \mathrel{L} a$).

$$V = \{(a,b) \;/\; [a,b] \in E(G'),\ \text{non } (a \mathrel{L} b \text{ ou } b \mathrel{L} a)\}$$

On note $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k$ les éléments de V.

On transforme G' par l'homomorphisme

$$G' \to G'' = \varepsilon v_k \circ \varepsilon v_{k-1} \circ \ldots \circ \varepsilon v_i \circ \ldots \circ \varepsilon v_1 \,(G')$$

On pose $G_j = \varepsilon w_j \circ \varepsilon w_{j-1} \circ \ldots \circ \varepsilon w_1 \,(G)$

$G'_i = \varepsilon v_i \circ \varepsilon v_{i-1} \circ \ldots \circ \varepsilon v_1 \,(G)$

Convention - Si dans G_{j-1} on a $a_j = b_j$, on pose $\varepsilon w_j = Id$

Si dans G'_{i-1} on a $a_i = b_i$, on pose $\varepsilon v_i = Id$

Remarque - W désignant un ensemble, tous ses éléments w_j sont considérés comme distincts (il en est de même pour V).

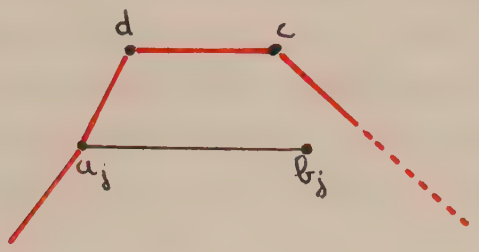
Démonstration -

Montrons que G' vérifie la propriété

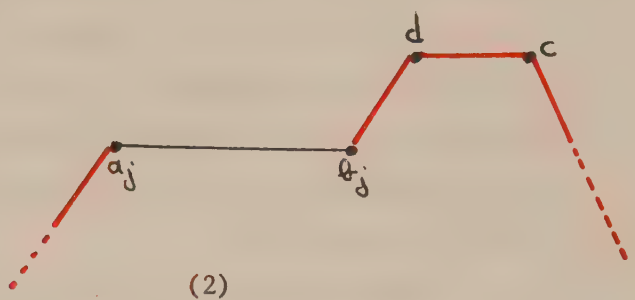
$$(\mathcal{P})\ \forall [a, b] \in E(G'),\ a \neq b,\ \text{non } (a \mathrel{L} b \text{ et } b \mathrel{L} a).$$

Pour cela il suffit de montrer que pour tout j, $1 \leq j \leq p$, $\varepsilon w_j = \varepsilon_{(a_j, b_j)}$ est tel qu'il n'existe pas d'arête $[c, d]$ ($[c, d] \neq [a_j, b_j]$, $c \neq d$) dans $G_{j-1} = \varepsilon w_{j-1} \circ \ldots \circ \varepsilon w_1 \,(G)$ satisfaisant non ($d \mathrel{L} c$) et dont l'image par εw_j soit une arête de G_j satisfaisant $c \mathrel{L} d$ et $d \mathrel{L} c$ (en termes intuitifs, quand on contracte le graphe pour supprimer les arêtes $[a, b]$ qui vérifient $a \mathrel{L} b$ et $b \mathrel{L} a$, on n'en crée pas de nouvelles de ce type).

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une telle arête $[c, d]$. Cela signifierait que dans G_j il existe une chaîne élémentaire C allant de p_o à p_1 sur laquelle d précède immédiatement c. Mais, puisque dans G_{j-1} nous avons non (d L c), la chaîne C de G_j doit passer une fois (et une seule) par $a_j = b_j$. L'image réciproque de C dans G_{j-1} est un ensemble d'arêtes de l'un des deux types suivants :



(1)



(2)

(1) Les deux arêtes de C incidentes à $a_j = b_j$ dans G_j sont les images de deux arêtes de G_{j-1}, incidentes à un même sommet.

(2) Les deux arêtes de C incidentes à $a_j = b_j$ dans G_j sont, l'une, l'image d'une arête de G_{j-1}, incidente à a_j, l'autre, l'image d'une arête de G_{j-1}, incidente à b_j.

Dans le premier cas, C est l'image d'une chaîne élémentaire de G_{j-1} ; cette chaîne est telle que dans G_{j-1} on aurait d L c, ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, dans G_{j-1} on adjoint l'arête $[a_j, b_j]$ à l'ensemble d'arêtes, image réciproque de C ; on obtient ainsi une chaîne élémentaire telle que l'on ait d L c, ce qui est impossible.

Cela signifie que, lorsqu'on applique un homomorphisme εw_j, $1 \leq j \leq p$, on ne crée pas d'arête $[c, d]$, $c \neq d$ vérifiant c L d et d L c.

Comme on applique à G successivement les homomorphismes correspondant à tous les éléments de W, G' a la propriété $(\mathcal{P})$.

De plus, d'après la démonstration précédente, nous voyons que dans un graphe H, si une arête $[c, d]$ vérifie non (c L d et d L c), dans le graphe ε (H) (image de H par un homomorphisme élémentaire qui identifie deux sommets de H formant un couple distinct de (c, d)) on ne peut avoir c L d et d L c. Par suite, G' ayant la propriété $(\mathcal{P})$, il en est de même de $G'_1 = \varepsilon v_1 (G')$, $G'_2 = \varepsilon v_2 (G'_1), \ldots, G'_i = \varepsilon v_i (G'_{i-1}), \ldots, G'' = \varepsilon v_k (G'_{k-1})$.

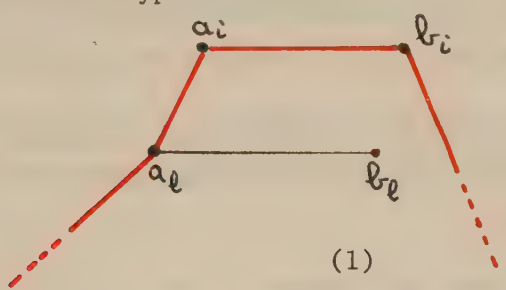
Pour montrer que G" est $PSP_{(p_o,p_1)}$ il reste à montrer qu'il vérifie la propriété

(Q) $\forall [a, b] \in E(G")$, $a \neq b$, (a L b) ou (b L a).

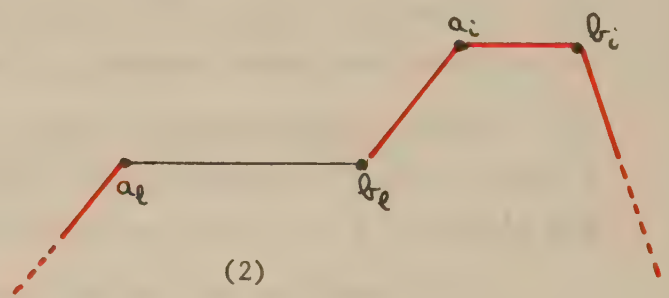
Pour cela il suffit de montrer que pour tout i, $1 \leq i \leq k$, $\varepsilon v_i = \varepsilon_{(a_i,b_i)}$ est tel qu'il n'existe pas d'arête $[c, d]$ ($c \neq d$, $[c, d] \neq [a_i, b_i]$) dans $G'_{i-1} = \varepsilon v_{i-1} o \ldots o \varepsilon v_1 (G')$ satisfaisant c L d et dont l'image par εv_i soit une arête de G_i satisfaisant non (c L d) et non (d L c), (en termes intuitifs quand on contracte le graphe pour supprimer les arêtes qui vérifient non (a L b) et non (b L a), on n'en crée pas de nouvelles de ce type).

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une telle arête $[c, d]$. Il existe alors dans G'_{i-1} une chaîne élémentaire C allant de p_o à p_1 du type $C = (p_o\ u_1\ a_i\ u_2\ c\ d\ u_3\ b_i\ u_4\ p_1)$, où u_1, u_2, u_3, u_4 sont des sous-chaînes de C ; mais alors dans G_{i-1} la chaîne $p_o\ u_1\ a_i b_i u_4\ p_1$ permet d'écrire a_i L b_i. Puisque $(a_i, b_i) \in V$, cela signifie qu'il existe un indice 1, $1 \leq i-1$, tel que l'on ait non (a_i L b_i) dans G'_{1-1} et a_i L b_i dans G'_1.

On a donc $(a_i, b_i) \neq (a_1, b_1)$ et il existe dans G'_1 une chaîne C allant de p_o à p_1 qui apour image réciproque dans G'_{1-1} un ensemble d'arêtes de l'un des deux types suivants



(1)



(2)

Comme nous l'avons vu précédemment, dans les deux cas nous pouvons déterminer dans G_{1-1} des chaînes élémentaires qui permettent de dire que dans G_{1-1} nous avons a_i L b_i, ce qui est impossible.

Cela signifie que lorsqu'on applique un homomorphisme εv_i, $1 \leq i \leq k$, on ne crée pas d'arêtes $[c, d]$, $c \neq d$, vérifiant , non (c L d) et non (d L c). Comme on applique à G' successivement les homomorphismes correspondant à tous les éléments de V, G" a la propriété (Q). Le graphe G" vérifie donc la propriété ($\mathcal{P}$) et la propriété (Q). On en déduit que le graphe G"', obtenu à partir de G" en supprimant les boucles de celui-ci, est un graphe connexe (les homomorphismes conservant la connexité) et vérifie

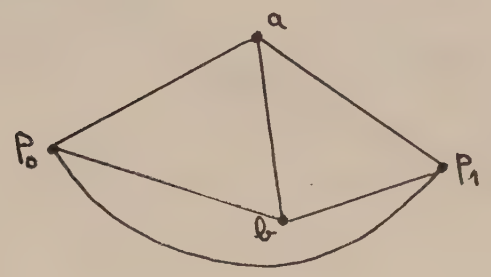
$\forall [a, b] \in E(G''')$, [a L b ou b L a] et non [a L b et b L a]

G''' est donc $SP_{(p_o,p_1)}$ et, par suite, G'' est $PSP_{(p_o,p_1)}$.

Exemples :

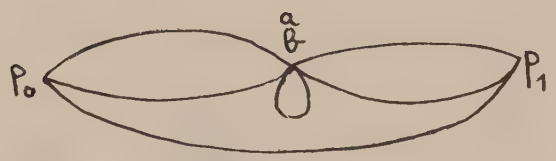
- K_4

G



$W = \{w_1 = (a, b)\}$, d'où

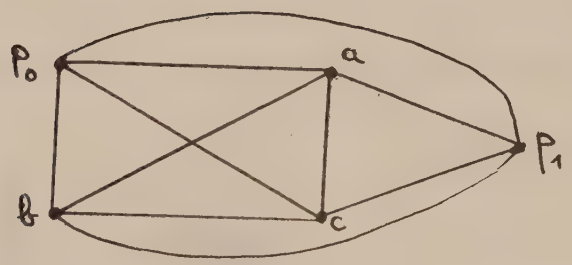
G'



$V = \emptyset$, d'où $G'' = G_1$

- K_5

G



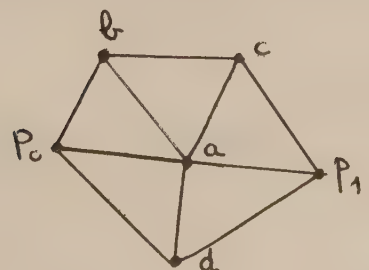
$W = \{w_1 = (a,b), w_2 = (b,c), w_3 = (a, c)\}$

G'

$V = \emptyset$, d'où $G'' = G'$

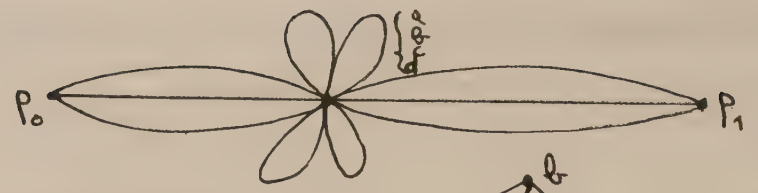
- W_5

G



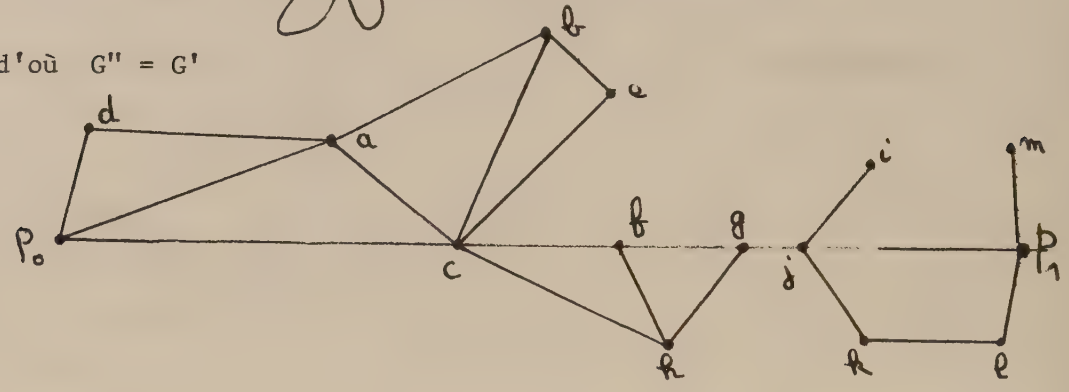
$W = \{w_1 = (a, b), w_2 = (a, c), w_3 = (a, d)\}$

G'



$V = \emptyset$, d'où $G'' = G'$

G

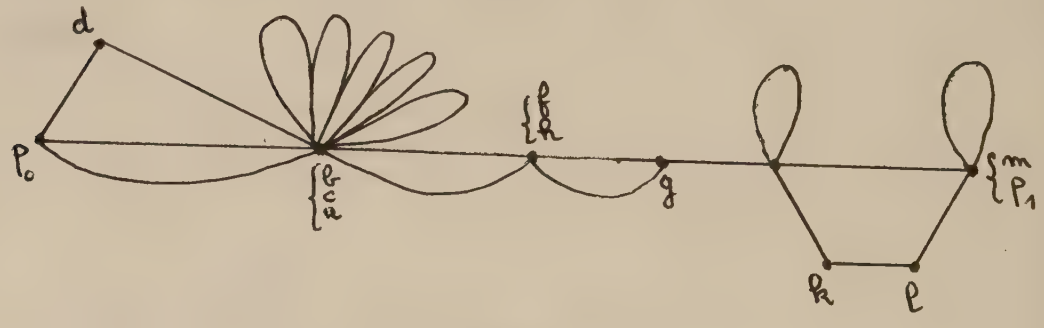


$W = \{w_1 = (b,c),\ w_2 = (a,\ c),\ w_3 = (f,\ h)\}$

G'

$V = \{v_1 = (i,\ j),\ v_2 = (m,\ p_1)\ ,\ v_3 = (a,\ e)\}$

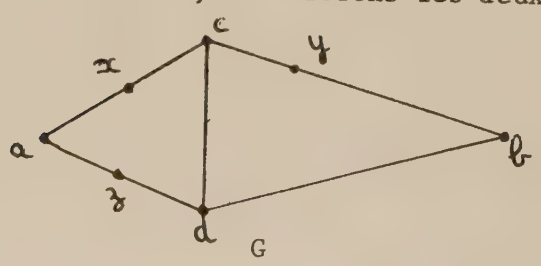
G''



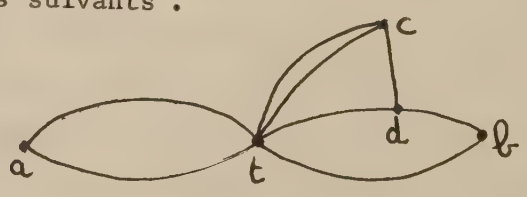
Remarque -
========

Ce procédé de transformation d'un graphe en graphe série-parallèle par homomorphisme n'est, évidemment,pas le seul que nous puissions envisager.

En effet, considérons les deux graphes suivants .



G



G'

L'algorithme que nous venons d'exposer ne permet pas de transformer G en le graphe $SP_{(a,b)}$ G'.

Il existe cependant un homomorphisme ε tel que ε G = G' ; il suffit pour cela que ε vérifie les relations

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = \varepsilon(z) = t \; ; \; \varepsilon(a) = a \; ; \; \varepsilon(b) = b \; ; \; \varepsilon(c) = c \; ; \; \varepsilon(d) = d.$$

CHAPITRE II

CONSTRUCTION DE SOUS-GRAPHES PARTIELS SERIE-PARALLELES MAXIMAUX D'UN GRAPHE DONNE

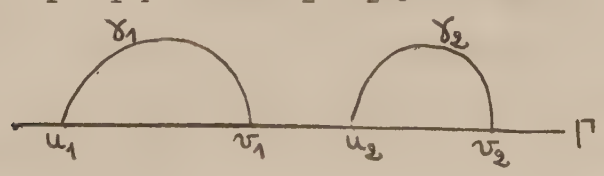
CONSTRUCTION D'UN SOUS-GRAPHE PARTIEL $SP_{(p_o, p_1)}$ MAXIMAL D'UN GRAPHE DONNE.

Etant donnés un graphe G quelconque et deux sommets p_o et p_1 de G, $p_o \neq p_1$, nous nous proposons d'établir deux algorithmes permettant de construire un sous-graphe partiel de G, $SP_{(p_o, p_1)}$ maximal (au sens de l'inclusion des graphes) pour cette propriété.

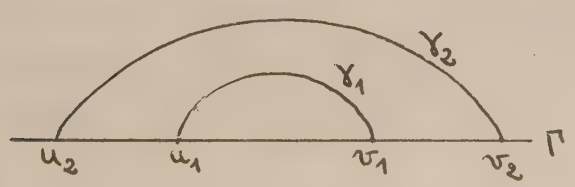
Notations - Etant donnée une chaîne élémentaire Γ d'un graphe H, nous appelerons

- sommet intérieur à Γ : tout sommet de Γ distinct de ses extrémités.
- intervalle $[u, v]_\Gamma$ (où $u, v \in X(\Gamma)$) : la sous-chaîne de Γ d'extrémités u et v.
- anse de Γ dans H : une branche de H dont
  - les sommets intérieurs à γ sont de degré 2 dans H ;
  - les extrémités u et v de γ vérifient $u, v \in X(\Gamma)$; $u \neq v$;
  - $\Gamma \cap \gamma = \{u, v\}$
- intervalle induit par une anse : si γ d'extrémités u et v est une anse de Γ, nous appellerons intervalle de Γ induit par γ, l'intervalle $[u, v]_\Gamma$.
- anses compatibles : deux anses γ_1 (d'extrémités u_1, v_1) et γ_2 (d'extrémités u_2, v_2) d'une même chaîne élémentaire Γ seront dites compatibles si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

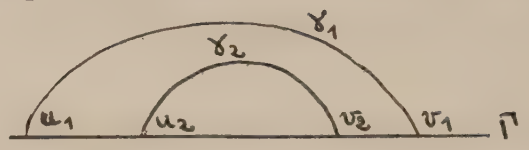
1) $E([u_1, v_1]_\Gamma) \cap E([u_2, v_2]_\Gamma) = \emptyset$



2) $[u_1, v_1]_\Gamma \subset [u_2, v_2]_\Gamma$



3) $[u_2, v_2]_\Gamma \subset [u_1, v_1]_\Gamma$



Convention - L'ensemble vide en tant que sous-graphe partiel de G, sera, par convention supposé $SP_{(p_o,p_1)}$.

I - PREMIER ALGORITHME DE CONSTRUCTION D'UN SOUS-GRAPHE PARTIEL $SP_{(p_o,p_1)}$ MAXIMAL DE G -

ALGORITHME I -

. Construisons un ensemble maximal (au sens de l'inclusion) Γ° de chaînes élémentaires de G allant de p_o à p_1 et disjointes sauf en leurs extrémités.

. Pour tout élément γ_o^i de Γ°, construisons un ensemble $A(\gamma_o^i)$ de chaînes élémentaires de G, formant un ensemble maximal (pour l'inclusion) d'anses compatibles de γ_o^i dans le graphe $\Gamma^\circ \cup \left(\bigcup_{\substack{i \\ \gamma_o^i \in \Gamma^\circ}} A(\gamma_o^i)\right)$

Remarque : d'après cette définition nous avons

$$\forall j \neq i, \quad A(\gamma_o^i) \cap \gamma_o^j \subset \{p_o, p_1\}$$

Nous ne pouvons donc avoir la figure suivante :

$\gamma \in A(\gamma_o^i)$

Posons $\Gamma^1 = \bigcup_{\substack{i \\ \gamma_o^i \in \Gamma^\circ}} A(\gamma_o^i)$

. Recommençons pour Γ^1 ce que nous avons fait pour Γ°. Pour tout élément γ_1^i de Γ^1, nous construisons un ensemble $A(\gamma_1^i)$ de chaînes élémentaires de G formant un ensemble maximal (pour l'inclusion)

d'anses compatibles de γ_1^i dans le graphe $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup (\bigcup_{\gamma_1^i \in \Gamma^1} A(\gamma_1^i))$

. Posons $\Gamma^2 = \bigcup_{\gamma_1^i \in \Gamma^1} A(\gamma_1^i)$

. Recommençons pour Γ^2 ce que nous avons fait pour Γ^1 et ainsi de suite. D'une manière générale, Γ°, Γ^1, Γ^2,..., Γ^j étant construits pour tout élément γ_j^i de Γ^j, nous construisons un ensemble maximal (pour l'inclusion) $A(\gamma_j^i)$ de chaînes élémentaires de G, formant un ensemble maximal d'anses compatibles de γ_j^i dans le graphe

$$\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^j \cup \left(\bigcup_{\gamma_j^i \in \Gamma^j} A(\gamma_j^i) \right)$$

. Nous arrêtons cette construction après avoir construit l'ensemble Γ^k correspondant à un indice k tel que $\Gamma^{k+1} = \emptyset$ (G étant fini, un tel indice existe nécessairement).

Alors le graphe $G' = \Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^k$ est un sous-graphe partiel de G $SP_{(p_o, p_1)}$ maximal pour cette propriété.

Description intuitive de l'algorithme -

Algorithme de construction de Γ° -

S'il existe dans G une chaîne élémentaire γ_o^1 allant de p_o à p_1, nous prenons γ_o^1 pour premier élément de Γ°. S'il n'existe pas de telle chaîne, $\Gamma^\circ = \emptyset$.

Lorsque Γ° est différent de $\emptyset$, s'il existe dans G une chaîne élémentaire γ_o^2 allant de p_o à p_1 et disjointe de γ_o^1 sauf en ses extrémités, nous prenons γ_o^2 pour deuxième élément de Γ° ; s'il n'existe pas de telle chaîne, $\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1\}$.

Lorsque γ_o^1 et γ_o^2 appartiennent à Γ°, s'il existe dans G une chaîne élémentaire γ_o^3 allant de p_o à p_1, disjointe de γ_o^1 et γ_o^2 sauf en ses extrémités, nous prenons γ_o^3 pour troisième élément de Γ° ; s'il n'existe pas de telle chaîne, $\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1, \gamma_o^2\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé i éléments $\gamma_o^1, \gamma_o^2, \ldots, \gamma_o^i$ de Γ°, s'il existe dans G une chaîne élémentaire γ_o^{i+1} allant de p_o à p_1, disjointe de $\gamma_o^1, \gamma_o^2, \ldots, \gamma_o^i$ sauf en ses extrémités, nous prenons γ_o^{i+1} pour $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de Γ° ; s'il n'existe pas de telle chaîne, $\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1, \gamma_o^2, \ldots, \gamma_o^i\}$.

G étant fini, nous obtenons Γ° au bout d'un nombre fini d'étapes. Nous notons $\gamma_o^1, \gamma_o^2, \ldots, \gamma_o^{|\Gamma^\circ|}$ les éléments de Γ°.

Algorithmes de construction de Γ^1 -

- S'il existe une anse $a_1(\gamma_o^1)$ de γ_o^1, c'est-à-dire une chaîne élémentaire de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^1 (resp. $G - \Gamma^\circ$), nous prenons $a_1(\gamma_o^1)$ pour premier élément de $A(\gamma_o^1)$; s'il n'existe pas de telle chaîne, $A(\gamma_o^1) = \emptyset$.

Lorsque $A(\gamma_o^1)$ est différent de $\emptyset$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_2(\gamma_o^1)$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^1 (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup a_1(\gamma_o^1))$) qui soit une anse de γ_o^1 compatible avec $a_1(\gamma_o^1)$, nous prenons $a_2(\gamma_o^1)$ pour deuxième élément de $A(\gamma_o^1)$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_o^1) = \{a_1(\gamma_o^1)\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé j éléments $a_1(\gamma_o^1), a_2(\gamma_o^1), \ldots, a_j(\gamma_o^1)$ de $A(\gamma_o^1)$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_{j+1}(\gamma_o^1)$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^1 (resp. à $G - (\Gamma^\circ \cup a_1(\gamma_o^1) \cup a_2(\gamma_o^1) \cup \ldots \cup a_j(\gamma_o^1))$) qui soit une anse de γ_o^1 compatible avec $a_1(\gamma_o^1), a_2(\gamma_o^1), \ldots, a_j(\gamma_o^1)$, nous prenons $a_{j+1}(\gamma_o^1)$ pour $(j+1)$ième élément de $A(\gamma_o^1)$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_o^1) = \{a_1(\gamma_o^1), a_2(\gamma_o^1), \ldots, a_j(\gamma_o^1)\}$.

G étant fini, nous obtenons $A(\gamma_o^1)$ au bout d'un nombre fini d'étapes. Nous notons $a_1(\gamma_o^1), a_2(\gamma_o^1), \ldots, a_{|A(\gamma_o^1)|}(\gamma_o^1)$ les éléments de γ_o^1.

- S'il existe une anse $a_1(\gamma_o^2)$ de γ_o^2, c'est-à-dire une chaîne élémentaire de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^2 (resp. $G - \Gamma^\circ - A(\gamma_o^1)$), nous prenons $a_1(\gamma_o^2)$ pour premier élément de $A(\gamma_o^2)$; s'il n'existe pas de telle chaîne, $A(\gamma_o^2) = \emptyset$.

Lorsque A (γ_o^2) est différent de $\emptyset$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_2(\gamma_o^2)$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^2 (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup A(\gamma_o^1) \cup a_1(\gamma_o^2))$) qui soit une anse de γ_o^2 compatible avec $a_1(\gamma_o^2)$, nous prenons $a_2(\gamma_o^2)$ pour deuxième élément de $A(\gamma_o^2)$; s'il n'existe pas de telle chaîne, $A(\gamma_o^2) = \{a_1(\gamma_o^2)\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé 1 élément $a_1(\gamma_o^2)$, $a_2(\gamma_o^2), \ldots, a_\ell(\gamma_o^2)$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_{\ell+1}(\gamma_o^2)$ de G dont les extrémités (resp. les points intérieurs) appartiennent à γ_o^2 (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup A(\gamma_o^1) \cup a_1(\gamma_o^2) \cup \ldots \cup a_{2_\ell}(\gamma_o^2))$) qui soit une anse de γ_o^2 compatible avec $a_1(\gamma_o^2)$, $a_2(\gamma_o^2), \ldots, a_{e_\ell}(\gamma_o^2)$, nous prenons $a_{\ell+1}(\gamma_o^2)$ pour $(\ell+1)$ième élément de $A(\gamma_o^2)$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_o^2) = \{a_1(\gamma_o^2), a_2(\gamma_o^2), \ldots, a_\ell(\gamma_o^2)\}$.

G étant fini, nous obtenons $A(\gamma_o^2)$ au bout d'un nombre fini d'étapes.

- Supposons que les ensembles $A(\gamma_o^1)$, $A(\gamma_o^2), \ldots, A(\gamma_o^m)$ soient construits et construisons $A(\gamma_o^{m+1})$.

S'il existe une anse $a_1(\gamma_o^{m+1})$ de γ_o^{m+1}, c'est-à-dire une chaîne élémentaire de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^{m+1} (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup A(\gamma_o^1) \cup A(\gamma_o^2) \cup \ldots \cup A(\gamma_o^m))$), nous prenons $a_1(\gamma_o^{m+1})$ pour premier élément de $A(\gamma_o^{m+1})$; s'il n'existe pas de telle chaîne, $A(\gamma_o^{m+1}) = \emptyset$.

Lorsque $A(\gamma_o^{m+1})$ est différent de $\emptyset$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_2(\gamma_o^{m+1})$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^{m+1} (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup A(\gamma_o^1) \cup \ldots \cup A(\gamma_o^{m+1}) \cup a_1(\gamma_o^{m+1}))$) qui soit une anse de γ_o^{m+1} compatible avec $a_1(\gamma_o^{m+1})$, nous prenons $a_2(\gamma_o^{m+1})$ pour deuxième élément de $A(\gamma_o^{m+1})$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_o^{m+1}) = \{a_1(\gamma_o^{m+1})\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé n éléments $a_1(\gamma_o^{m+1})$, $a_2(\gamma_o^{m+1}), \ldots, a_n(\gamma_o^{m+1})$ de $A(\gamma_o^{m+1})$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_{n+1}(\gamma_o^{m+1})$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_o^{m+1} (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup A(\gamma_o^1) \cup \ldots \cup A(\gamma_o^m) \cup a_1(\gamma_o^{m+1}) \cup \ldots \cup a_n(\gamma_o^{m+1}))$) qui soit une anse de γ_o^{m+1} compatible avec $a_1(\gamma_o^{m+1})$, $a_2(\gamma_o^{m+1}), \ldots, a_n(\gamma_o^{m+1})$, nous prenons $a_{n+1}(\gamma_o^{m+1})$ pour $(n+1)$ième élément de $A(\gamma_o^{m+1})$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_o^{m+1}) = \{a_1(\gamma_o^{m+1}), \ldots, a_n(\gamma_o^{m+1})\}$.

Nous construisons ainsi A (γ_o^1), A (γ_o^2),..., A $(\gamma_o^{|\Gamma^\circ|})$ dont la réunion forme Γ^1.

Supposons que nous ayons construit Γ°, Γ^1,..., Γ^p.

Algorithme de construction de Γ^{p+1} -

Notons γ_p^1, γ_p^2,..., $\gamma_p^{|\Gamma^p|}$ les éléments de Γ^p.

- S'il existe une anse $a_1(\gamma_p^1)$ de γ_p^1, c'est-à-dire une chaîne élémentaire de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_p^1 (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^p)$, nous prenons $a_1(\gamma_p^1)$ pour premier élément de A (γ_p^1) ; s'il n'existe pas de telle chaîne, A $(\gamma_p^1) = \emptyset$.

Lorsque A (γ_p^1) est différent de $\emptyset$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_2(\gamma_p^1)$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_p^1 (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^p \cup a_1(\gamma_p^1))$) qui soit une anse de γ_p^1 compatible avec $a_1(\gamma_p^1)$, on prend $a_2(\gamma_p^1)$ pour deuxième élément de A (γ_p^1) ; s'il n'existe pas de telle anse, A $(\gamma_p^1) = \{a_1(\gamma_p^1)\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé q éléments $a_1(\gamma_p^1)$, $a_2(\gamma_p^1)$,..., $a_{q_1}(\gamma_p^1)$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_p^1 (resp. à $G - (\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^p \cup a_1(\gamma_p^1) \cup \ldots \cup a_{q_1}(\gamma_p^1))$) qui soit une anse de γ_p^1 compatible avec $a_1(\gamma_p^1)$,..., $a_q(\gamma_p^1)$, nous prenons $a_{q+1}(\gamma_p^1)$ pour (q+1) ième élément de A (γ_p^1) ; s'il n'existe pas de telle anse, A $(\gamma_p^1) = \{a_1(\gamma_p^1), a_2(\gamma_p^1),\ldots, a_q(\gamma_p^1)\}$.

G étant fini, nous obtenons A (γ_p^1) au bout d'un nombre fini d'étapes.

- Supposons que les ensembles A (γ_p^1),..., A (γ_p^r) soient construits et construisons A (γ_p^{r+1}).

S'il existe une anse $a_1(\gamma_p^{r+1})$ de γ_p^{r+1}, c'est-à-dire une chaîne élémentaire de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_p^{r+1} (resp. $G - (\Gamma^\circ \cup \ldots \cup \Gamma^p \cup A(\gamma_p^1) \cup \ldots \cup A(\gamma_p^r))$), nous prenons $a_1(\gamma_p^{r+1})$ pour premier élément de A (γ_p^{r+1}) ; s'il n'existe pas de telle chaîne, A $(\gamma_p^{r+1}) = \emptyset$.

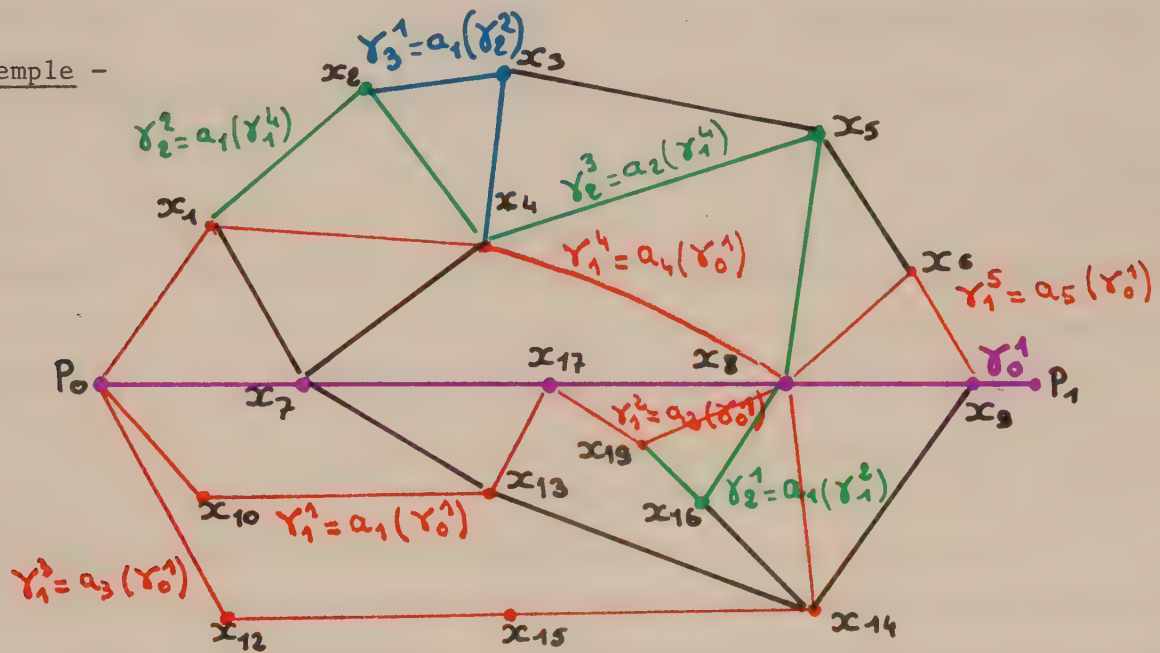
Lorsque A (γ_p^{r+1}) est différent de $\emptyset$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_2(\gamma_p^{r+1})$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent

à γ_p^{r+1} (resp. G - ($\Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^p \cup A(\gamma_p^1) \cup \ldots \cup A(\gamma_p^r) \cup a_1(\gamma_p^{r+1})$)) qui soit une anse de γ_p^{r+1} compatible avec $a_1(\gamma_p^{r+1})$, nous prenons $a_2(\gamma_p^{r+1})$ pour deuxième élément de $A(\gamma_p^{r+1})$; s'il n'existe pas de telle anse, $A(\gamma_p^{r+1}) = \{a_1(\gamma_p^{r+1})\}$.

Nous réitérons le procédé. D'une manière générale, quand nous avons trouvé s éléments $a_1(\gamma_p^{r+1})$, $a_2(\gamma_p^{r+1}),\ldots, a_s(\gamma_p^{r+1})$ de $A(\gamma_p^{r+1})$, s'il existe une chaîne élémentaire $a_{s+1}(\gamma_p^{r+1})$ de G dont les extrémités (resp. les sommets intérieurs) appartiennent à γ_p^{r+1} (resp. G - ($\Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^p \cup A(\gamma_p^1) \cup \ldots \cup A(\gamma_p^r) \cup a_1(\gamma_p^{r+1}) \cup \ldots \cup a_s(\gamma_p^{r+1})$)) qui soit une anse de γ_p^{r+1}) compatible avec $a_1(\gamma_p^{r+1}),\ldots, a_s(\gamma_p^{r+1})$, nous prenons $a_{s+1}(\gamma_p^{r+1})$ pour (s+1)ième élément de $a(\gamma_p^{r+1})$; s'il n'existe pas de telle anse,
$A(\gamma_p^{r+1}) = \{a_1(\gamma_p^{r+1}),\ldots, a_s(\gamma_p^{r+1})\}$.

Nous construisons ainsi $A(\gamma_p^1)$, $A(\gamma_p^2),\ldots, A(\gamma_p^{|\Gamma^p|})$ dont la réunion forme Γ^{p+1}.

Exemple -



$(p_o, x_7, x_{17}, x_8, x_9, p_1)$ est une chaîne élémentaire de G allant de p_o à p_1, nous posons $\gamma_o^1 = (p_o, x_7, x_{17}, x_8, x_9, p_1)$.

Il n'existe pas de chaîne élémentaire de G allant de p_o à p_1, disjointe de γ_o^1 (sauf en p_o et p_1), donc $\Gamma^o = \{\gamma_o^1\}$.

$(p_o, x_{10}, x_{13}, x_{17})$ est une anse de γ_o^1, nous posons $a_1(\gamma_o^1) = (p_o, x_{10}, x_{13}, x_{17})$. Nous posons $a_2(\gamma_o^1) = (x_{17}, x_{19}, x_8)$; $a_3(\gamma_o^1) = (p_o, x_{12}, x_{15}, x_{14}, x_8)$; $a_4(\gamma_o^1) = (p_o, x_1, x_4, x_8)$; $a_5(\gamma_o^1) = (x_8, x_6, x_9)$. Il n'existe pas d'anse de γ_o^1 compatible avec $a_1(\gamma_o^1)$, $a_2(\gamma_o^1)$, $a_3(\gamma_o^1)$, $a_4(\gamma_o^1)$,

$a_5(\gamma_o^1)$. $\Gamma^1 = A(\gamma_o^1) = \{a_1(\gamma_o^1), a_2(\gamma_o^1), a_3(\gamma_o^1), a_4(\gamma_o^1), a_5(\gamma_o^1)\}$.

Nous notons respectivement γ_1^1, γ_1^2, γ_1^3, γ_1^4, γ_1^5 les éléments $a_1(\gamma_o^1)$, $a_2(\gamma_o^1)$, $a_3(\gamma_o^1)$, $a_4(\gamma_o^1)$, $a_5(\gamma_o^1)$ de Γ^1.

$A(\gamma_1^1) = \emptyset$.

(x_{19}, x_{16}, x_2) est la seule anse de γ_1^2, donc $A(\gamma_1^2) = \{a_1(\gamma_1^2)\} = \{(x_{19}, x_{16}, x_{18})\}$.

$A(\gamma_1^3) = \emptyset$.

(x_1, x_2, x_4) et (x_4, x_5, x_8) sont deux anses compatibles de γ_1^4, nous posons $a_1(\gamma_1^4) = (x_1, x_2, x_4)$, $a_2(\gamma_1^4) = (x_4, x_5, x_8)$. Il n'existe pas d'anse de γ_1^4 compatible avec $a_1(\gamma_1^4)$ et $a_2(\gamma_1^4)$, donc $A(\gamma_1^4) = \{a_1(\gamma_1^4), a_2(\gamma_1^4)\}$.

$A(\gamma_1^5) = \emptyset$.

$\Gamma^2 = A(\gamma_1^2) \cup A(\gamma_1^4)$.

Nous notons respectivement γ_2^1, γ_2^2, γ_2^3 les éléments $a_1(\gamma_1^2)$, $a_1(\gamma_1^4)$, $a_2(\gamma_1^4)$.

$A(\gamma_2^1) = \emptyset$.

(x_2, x_3, x_4) est la seule anse de γ_2^2, donc $A(\gamma_2^2) = \{a_1(\gamma_2^2)\} = \{(x_2, x_3, x_4)\}$.

$A(\gamma_2^3) = \emptyset$.

$\Gamma^3 = A(\gamma_2^2) = \{a_1(\gamma_2^2)\}$. Nous posons $\gamma_3^1 = a_1(\gamma_2^2)$.

$\Gamma^4 = A(\gamma_3^1) = \emptyset$. Par suite $G' = \Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$.

Nous allons montrer qu'étant donné un graphe G et deux sommets p_o et p_1 de ce graphe, l'algorithme permet de construire un graphe $G = \Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^k$ qui soit un sous-graphe partiel $SP_{(p_o, p_1)}$ maximal de G.

I - Montrons que G' est $SP_{(p_o, p_1)}$ -

Lemme : Etant donné un graphe H et deux sommets p_o et p_1 de ce graphe, considérons les deux opérations :

1) Remplacement d'un ensemble d'arêtes parallèles par une seule arête.

2) Contraction élémentaire identifiant deux sommets adjacents dont l'un, au moins, est de degré 2 et distinct de p_o et de p_1.

(En termes intuitifs l'opération 2) consiste en la suppression d'un sommet x de degré 2, $x \neq p_o, p_1$, et la création d'une arête joignant les deux sommets auxquels x était adjacent).

Soient respectivement H' et H'' les graphes obtenus par application de l'opération 1) et de l'opération 2) à H.

Alors

$$H\ SP_{(p_o,\ p_1)} \Leftrightarrow H'\ SP_{(p_o,p_1)} \Leftrightarrow H''\ SP_{(p_o,p_1)}$$

Ce résultat est évident, car les opérations 1) et 2) ne modifient pas la structure des chaînes élémentaires de H allant de p_o à p_1. Par suite, si l'un des trois graphes H, H', H'' vérifie la propriété caractéristique d'ELGOT et WRIGHT (voir chapitre I, préliminaires), il en est de même des deux autres.

Montrons maintenant que G' est $SP_{(p_o,\ p_1)}$.

Soit $j \in \{o, \ldots, k-1\}$; dans $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^{j+1}$, les sommets intérieurs à tous les éléments de Γ^{j+1} sont de degré 2, on applique l'opération 2) à tous ces sommets, cela revient à réduire à 1 la longueur de chaque élément de Γ^{j+1}. Soit $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma'^{j+1}$ le graphe ainsi obtenu et que nous considérons maintenant.

Etant donné $\gamma_j \in \Gamma^j$, montrons que l'on peut supprimer par les opérations 1) et 2) les anses de Γ^{j+1} construites sur elle. Remarquons qu'en vertu de ce qui précède, ces anses sont de longueur 1.

Commençons par appliquer 2) à tous les sommets intérieurs de degré 2 de γ_j. D'après leur construction, deux anses construites sur γ_j induisent sur lui deux intervalles disjoints (au sens des arêtes) ou inclus l'un dans l'autre. Certains intervalles induits sur γ_j n'en contiennent aucun autre. Faisons subir l'opération 1) aux anses qui induisent ces intervalles sur γ_j. Réitérons ensuite le procédé. Au bout d'un nombre fini d'itérations nous aurons éliminé toutes les anses de Γ^{j+1} construites sur γ_j. De plus, après avoir appliqué l'opération 1) aux sommets intérieurs de degré 2 de γ_j, nous obtenons un graphe dans lequel γ_j ne possède qu'une seule arête.

Opérant ainsi pour tout $\gamma_j \in \Gamma^j$, nous obtenons le graphe $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma'^j$.

Par les opérations 1) et 2), nous pouvons donc passer de proche en proche du graphe $G' = \Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^k$ à $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \ldots \cup \Gamma'^k$, puis, à $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma'^{k-1}, \ldots$, de $\Gamma^\circ \cup \ldots \cup \Gamma'^{j+1}$ à $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma'^j$ et ainsi de suite jusqu'à Γ'°.

Γ'° est le graphe constitué de deux sommets p_o, p_1 et de $|\Gamma^\circ|$ arêtes $[p_o, p_1]$.

Nous appliquons 1) à ces $|\Gamma^\circ|$ arêtes parallèles de sorte qu'il ne reste plus qu'une seule arête $[p_o, p_1]$.

Le graphe obtenu est alors le graphe K_2 avec $X(K_2) = \{p_o, p_1\}$.

Le graphe K_2 avec $X(K_2) = \{p_o, p_1\}$ est $SP_{(p_o, p_1)}$; nous l'obtenons à partir de G' par applications successives d'opérations 1) et 2) ; par suite, en vertu du lemme, nous savons que G' est $SP_{(p_o, p_1)}$.

De plus, d'après sa construction, G' est un sous-graphe partiel de G.

G' est donc un sous-graphe partiel $SP_{(p_o, p_1)}$ de G.

II - Notations et remarques concernant G' -

Hauteur d'une anse γ de G' : c'est l'indice j tel que γ appartienne à Γ^j.

Hauteur d'un sommet de G' : c'est le plus petit indice i tel que ce sommet appartienne à une anse de hauteur i.

Nous voyons que tout sommet intérieur à une anse γ_i est de hauteur i.

Etant données deux anses γ_i et γ_j de hauteurs respectives i et j ($i < j$), nous dirons que γ_j est conséquence de γ_i si et seulement si il existe une suite d'anses $\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_{j-1}$ telle que pour tout k', $i \leq k' \leq j - 1$, $\gamma_{k'} \in \Gamma^{k'}$ et que $\gamma_{k'+1}$ soit une anse construite sur $\gamma_{k'}$. Dans le cas où γ_j est conséquence de γ_i, nous appelons intervalle induit par γ_j sur γ_i, l'intervalle induit par γ_{i+1} sur γ_i.

γ_j est conséquence immédiate de γ_i si et seulement si γ_j est conséquence de γ_i et $j = i + 1$.

Remarques -

1°) Pour tout i, $o \leq i \leq k$ et pour tout élément γ_i de Γ^i nous pouvons distinguer une extrémité initiale et une extrémité finale, en établissant cette distinction par induction.

Tout élément γ_o de Γ° ayant pour extrémités p_o et p_1, nous choisissons p_o pour extrémité initiale et p_1 pour extrémité finale.

Supposons que pour tout élément $\gamma_i \in \Gamma^i$ nous ayons distingué une extrémité initiale et une extrémité finale et considérons un élément γ_{i+1} de Γ^{i+1}. Dans l'élaboration de G', γ_{i+1} a été construit comme anse d'une chaîne γ_i ($\in \Gamma^i$) du graphe $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^i$; les deux extrémités de γ_{i+1} sont donc deux sommets de γ_i. Supposons par induction que nous ayons distingué une extrémité initiale a_i et une extrémité finale b_i de γ_i. Nous convenons alors que l'extrémité initiale de γ_{i+1} est la première rencontrée quand on parcourt γ_i en allant de a_i vers b_i.

2°) D'après la construction des ensembles Γ^i, pour deux anses γ_p ($\in \Gamma^p$) et γ'_q ($\in \Gamma^q$) d'extrémités initiales (resp. finales) a_p et a_q (resp. b_p et b_q), nous avons toujours

$$E(\gamma_p) \cap E(\gamma'_p) = \emptyset, \quad |X(\gamma_p) \cap X(\gamma'_q)| \leq 2$$

3°) Soient deux anses γ_p et γ'_q d'extrémités respectives a_p, b_p et a_q, b_q. Nous nous trouvons dans l'un des cas suivants :

1er cas : $p < q$ et γ'_q est conséquence de γ_p. Dans ce cas $\gamma_p \cap \gamma'_q$ est inclus dans l'ensemble $\{a_q, b_q\}$. Supposons que nous ayons $\{a_p, b_p\} = \{a_q, b_q\}$. Tout sommet intérieur à γ'_q est de hauteur q et ne peut donc appartenir à $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^{q-1}$; puisque $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^q$ contient Γ^p, aucun sommet intérieur à γ'_q n'appartient à $X(\Gamma^p)$, ce que nous écrivons

$$\forall \gamma''_p \in \Gamma^p, \quad \gamma''_p \cap \gamma'_q \subset \{a_q, b_q\} = \{a_p, b_p\} \quad (A)$$

. Si p = 0, (A) implique $\forall \gamma''_o \in \Gamma^\circ, \ \gamma''_o \cap \gamma'_q = \{p_o, p_1\}$. Mais puisque γ'_q n'appartient pas à Γ°, ceci contredit la maximalité de Γ°.

. Si p > o, nous considérons l'anse γ_{p-1} dont γ_p est conséquence immé-

diate, nous avons $[a_p, b_p]_{\gamma_{p-1}} = [a_q, b_q]_{\gamma_{p-1}}$ (B) ; dans ce cas (A) et (B) permettent d'affirmer que l'anse γ'_q (dont les extrémités appartiennent à γ_{p-1}) est une anse compatible avec γ_p et avec toutes les anses compatibles avec γ_p. γ'_q est donc compatible avec toutes les anses de Γ^p conséquences immédiates de γ_{p-1}, les extrémités de γ'_q appartiennent à γ_{p-1} et, cependant, γ'_q n'appartient pas à l'ensemble Γ^p.

Ceci contredit la maximalité de Γ^p.

Par conséquent, nous avons $\{a_p, b_p\} \neq \{a_q, b_q\}$ (C)

2ème cas : γ_p et γ'_q ne sont pas conséquences l'une de l'autre et il existe une anse (de hauteur strictement inférieure à p et à q) dont γ_p et γ'_q sont conséquences -

Dans ce cas, nous avons $\gamma_p \cap \gamma'_q \subset \{a_p, b_p, a_q, b_q\}$. Puisque γ_p et γ'_q ne sont pas conséquences l'une de l'autre, ni a_p ni b_p ne peut être sommet intérieur de γ'_q ; ni a_q, ni b_q ne peut être sommet intérieur de γ_p. Ceci nous permet d'écrire

$$|X(\gamma_p) \cap X(\gamma'_q)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} p = q \\ \gamma_p \cap \gamma'_q = \{a_p, b_p\} = \{a_q, b_q\} \end{cases}$$

3ème cas : γ_p et γ'_q ne sont pas conséquences l'une de l'autre et il n'existe pas d'anse dont γ_p et γ'_q soient toutes deux conséquences -

Supposons l'existence d'un sommet x de $\gamma_p \cap \gamma'_q$, différent de p_o et de p_1. Soit i la hauteur de x ; x est sommet intérieur d'une anse γ_i de hauteur i. Puisque dans le graphe $\Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^i$ les sommets intérieurs aux éléments de Γ^i sont de degré 2, γ_i est la seule anse de hauteur i qui contienne x. Ceci implique que γ_p et γ'_q sont conséquences de γ_i, ce qui est impossible. $\gamma_p \cap \gamma'_q$ est donc inclus dans $\{p_o, p_1\}$. En particulier, ceci nous permet d'écrire :

$$|X(\gamma_p) \cap X(\gamma'_q)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} p = q = o \\ \gamma_p \cap \gamma'_q = \{p_o, p_1\} = \{a_p, b_p\} = \{a_q, b_q\} \end{cases}$$

4°) Pour tout i, $o \leq i \leq k-1$, γ_{i+1} ne peut être conséquence immédiate de deux éléments distincts γ_i et γ'_i de Γ^i -

Supposons que γ_{i+1} soit conséquence immédiate de deux éléments distincts γ_i et de γ'_i de Γ^i.

Soient a_i et b_i les extrémités (resp. initiale et finale) de γ_i.

Soient a'_i et b'_i les extrémités (resp. initiale et finale) de γ'_i.

a_{i+1} et b_{i+1} les extrémités (resp. initiale et finale) de γ_{i+1}.

Nous aurions $$\gamma_i \cap \gamma_{i+1} = \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$$
$$\gamma'_i \cap \gamma_{i+1} = \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$$

(C) nous permet d'écrire $$\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \neq \{a_i, b_i\}$$
$$\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \neq \{a'_i, b'_i\}$$

$\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \subset \gamma_i \cap \gamma'_i \Rightarrow |X(\gamma_i) \cap X(\gamma'_i)| = 2,\ \gamma_i \cap \gamma'_i = \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$

γ_i et γ'_i sont deux anses de même hauteur et l'intersection de leurs ensembles de sommets est de cardinal 2 ; nous sommes donc placés dans le 2ème ou le 3ème cas de la remarque 3°).

Puisque $|X(\gamma_i) \cap X(\gamma'_i)| = 2$, nous déduisons de l'étude de ces deux cas $\gamma_i \cap \gamma'_i = \{a_i, b_i\} = \{a'_i, b'_i\}$.

Nous aurions donc les résultats suivants :

$$\gamma_i \cap \gamma'_i = \{a_i, b_i\} = \{a'_i, b'_i\}$$
$$\gamma_i \cap \gamma'_i = \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$$
$$\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \neq \{a_i, b_i\}$$
$$\{a_{i+1}, b_{i+1}\} \neq \{a'_i, b'_i\}$$

Ces résultats étant contradictoires, γ_{i+1} ne peut être conséquence immédiate de γ_i et de γ'_i, et nous obtenons la propriété cherchée.

Cette propriété nous permet de dire (en l'appliquant successivement pour les indices, i, i-1, i-2,..., 1) que pour tout $\gamma_i \in \Gamma^i$, $o \leq i \leq k$, il existe une suite unique de i éléments $\gamma_o, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}, \gamma_i$ telle que, pour tout k', $o \leq k' \leq i-1$, $\gamma_{k'}$ appartienne à $\Gamma^{k'}$ et que $\gamma_{k'+1}$ soit une anse conséquence immédiate de $\gamma_{k'}$.

Cette suite est la suite de toutes les anses dont γ_i est conséquence, nous dirons que c'est la suite d'anses qui définit γ_i dans G'.

5°) Proposition -

Pour tout i, $o \leq i \leq k$ et pour tout γ_i ($\in \Gamma^i$), défini par la suite $\mathcal{C} = (\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_i)$ il existe dans G' une chaîne élémentaire C_{γ_i} allant de p_o à p_1 et possédant les propriétés suivantes :

* $\gamma_i \subset C_{\gamma_i}$

* $C_{\gamma_i} \subset \gamma_o \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_i$

* Si a_p et b_p ($o \leq p \leq i+1$) sont extrémités (respectivement initiale et finale) de l'élément γ_p de $\mathcal{C}$, lorsqu'on parcourt C_{γ_i} de p_o vers p_1, on rencontre dans cet ordre les sommets $p_o = a_o, a_1, a_2, \ldots, a_i, b_i, b_{i-1}, \ldots, b_1, b_o = p_1$ avec $[a_i, b_i]_{C_{\gamma_i}} = \gamma_i$.

Démontrons ce résultat en raisonnant par induction sur i.

. i = o . Considérons un élément γ_o quelconque de Γ^o ; il est défini dans G' par la suite $\mathcal{C} = (\gamma_o)$ à un seul élément γ_o. Posons $C_{\gamma_o} = \gamma_o$; C_{γ_o} est bien une chaîne élémentaire allant de p_o à p_1 rencontrant $p_o = a_o$, puis $p_1 = b_o$, vérifiant $\gamma_o \subset C_{\gamma_o}$, C_{γ_o} et $[a_o, b_o]_{C_{\gamma_o}} = \gamma_o$. Cette chaîne a donc les propriétés voulues. De plus, c'est la seule chaîne de G' possédant ces propriétés.

. Supposons la proposition vérifiée jusqu'à l'ordre i et démontrons-la pour l'ordre i+1.

Considérons un élément quelconque γ_{i+1} de Γ^{i+1} et la suite (unique) $\mathcal{C} = (\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_i, \gamma_{i+1})$ qui définit γ_{i+1} dans G'. D'après la définition d'une telle suite chaque élément $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ est conséquence immédiate de l'élément qui le précède dans $\mathcal{C}$; $(\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_i)$ est donc la suite qui définit γ_i dans G'. En vertu de l'hypothèse d'induction, il existe une chaîne élémentaire C_{γ_i} allant de p_o à p_1 telle que :

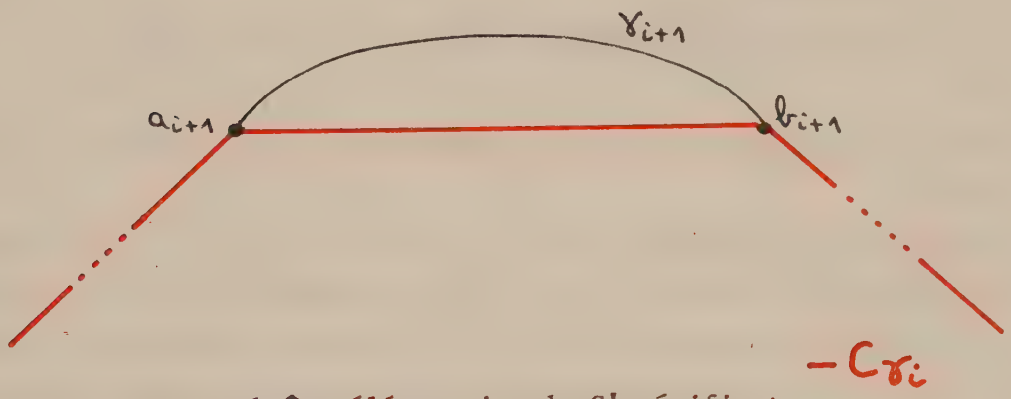
* $\gamma_i \subset C_{\gamma_i}$

* $C_{\gamma_i} \subset \gamma_o \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_i$

* Lorsqu'on parcourt C_{γ_i}, on rencontre successivement les sommets $p_o = a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, b_i, b_{i-1}, \ldots, b_1, b_o = p_1$ avec $[a_i, b_i]_{C_{\gamma_i}} = \gamma_i$.

Puisque γ_{i+1} est conséquence immédiate de γ_i, a_{i+1} et b_{i+1} appartiennent à γ_i, par suite a_{i+1} et b_{i+1} appartiennent à $[a_i, b_i]_{C_{\gamma_i}}$. On peut donc dire qu'en parcourant C_{γ_i} de p_o vers p_1, on rencontre successivement $p_o = a_o, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, b_i, \ldots, b_o = p_1$.

Considérons alors la chaîne $C = [p_o, a_{i+1}]_{C_{\gamma_i}} \cup \gamma_{i+1} \cup [b_{i+1}, p_1]_{C_{\gamma_i}}$.



C est une chaîne élémentaire de G' vérifiant

* $\gamma_{i+1} \subset C$

* $C \subset C_{\gamma_i} \cup \gamma_{i+1} \subset \gamma_o \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_i \cup \gamma_{i+1}$

* lorsqu'on parcourt C de p_o vers p_1 on rencontre successivement les sommets $p_o = a_o, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, b_i, \ldots, b_o = p_1$ avec $[a_{i+1}, b_{i+1}]_C = \gamma_{i+1}$.

C remplit les conditions requises et l'on peut donc poser $C_{\gamma_{i+1}} = C$.

Exemple - Considérons le graphe de la page 21.

$C_{\gamma_o^1} = \gamma_o^1 = (p_o, x_7, x_{17}, x_8, x_9, p_1)$

$C_{\gamma_1^4} = (p_o, x_1, x_4, x_8, x_9, p_1)$

$$C_{\gamma_2^2} = (p_o, x_1, x_2, x_4, x_8, x_9, p_1)$$

$$C_{\gamma_3^1} = (p_o, x_1, x_2, x_3, x_4, x_8, x_9, p_1)$$

III - Montrons que G' est maximal(pour l'inclusion des graphes)-

Soit donc le graphe $G' = \Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^k$ dont nous avons déjà démontré qu'il était un sous-graphe partiel $SP_{(p_o, p_1)}$ de G. Un graphe SP n'ayant pas de sommets isolés, il suffit de montrer que E (G') est maximal pour montrer la maximalité de G'.

Supposons qu'il existe un graphe G" vérifiant

1°) $G'' \subset G$

2°) G" $SP_{(p_o, p_1)}$

3°) $E(G') \subset\!\!\!\!\neq E(G'')$.

Alors il existe une arête e qui appartient à E (G"), mais n'appartient pas à E (G').

Puisque e appartient à E (G") et que G" est $SP_{(p_o, p_1)}$, il existe une chaîne élémentaire de G" allant de p_o à p_1 et contenant e. Soit γ la sous-chaîne maximale de celle-ci, contenant e et dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à G'. Soient u et v les extrémités deγ (γ étant une chaîne élémentaire, u et v sont deux sommets distincts de G').

L'ensemble Γ^o construit lors de l'élaboration de G' étant maximal, $\{u, v\}$ est nécessairement distinct de $\{p_o, p_1\}$. Nous avons donc

$$\begin{cases} u, v \in G' \\ u \neq v \\ \{u, v\} \neq \{p_o, p_1\} \end{cases}$$

Examinons les différentes positions que peuvent avoir les deux sommets u et v dans le graphe G'.

Supposons qu'il existe i, $o \leq i \leq k$, tel que u et v soient deux sommets d'une même anse de Γ^i.

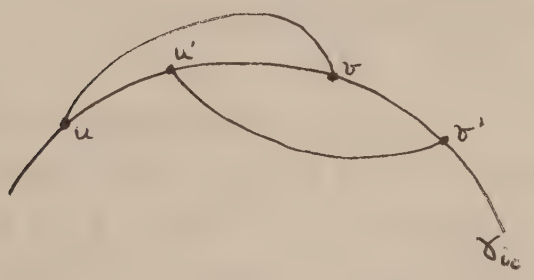
Soit i_o le plus petit indice tel qu'il existe une anse γ_{i_o} de Γ^{i_o} dont u et v soient deux sommets.

Puisque $\{u, v\}$ est différent de $\{p_o, p_1\}$, la minimalité de i_o indique que l'un au moins des deux sommets u et v est sommet intérieur de γ_{i_o}. γ a ses extrémités sur γ_{i_o} et ses sommets intérieurs n'appartiennent pas à G', ni, a fortiori, à $\Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^{i_o}$, cependant γ n'appartient pas à Γ^{i_o+1}. Γ^{i_o+1} étant maximal, si l'on n'a pas pris γ comme élément de Γ^{i_o+1}, c'est que γ est incompatible avec au moins un élément de Γ^{i_o+1}. Il existe donc un élément γ' de Γ^{i_o+1}, d'extrémités u' et v', incompatible avec γ. Cela signifie que lorsqu'on parcourt γ_{i_o}, on rencontre les sommets u, u', v, v' dans l'un des deux ordres suivants :

u - u' - v - v' ou u' - u - v' - v

avec $u \neq u'$, $v \neq v'$, $u' \neq v$ avec $u \neq u'$, $v \neq v'$, $u \neq v'$

Supposons que ces sommets soient rencontrés dans l'ordre u - u' - v - v' (le raisonnement est le même dans l'autre cas) avec $u' \neq v$, $v \neq v'$, $u \neq u'$.



Considérons $C_{\gamma_{i_o}}$; c'est une chaîne de G' et donc une chaîne de G" puisque $G' \subset_{\neq} G''$; elle rencontre successivement les sommets p_o, u, u', v, v' et p_1.

Considérons la chaîne élémentaire de G" suivante :

$$[p_o, u]_{C_{\gamma_{i_o}}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, u']_{C_{\gamma_{i_o}}} \cup [u', v']_{\gamma'} \cup [v', p_1]_{C_{\gamma_{i_o}}}.$$

Grâce à ces deux chaînes nous voyons que toute arête $[a, b]$ de $[u', v']_{\gamma_{i_o}}$ (il en existe au moins une puisque u' est différent de v) vérifie a L b et b L a, ce qui est impossible puisque G" est $SP_{(p_o, p_1)}$.

Par conséquent, <u>dans G', u et v ne peuvent appartenir à une même anse</u>.

Soient i et j les hauteurs respectives de u et de v.

Soit γ_i un élément de Γ^i tel que u appartienne à γ_i.

Soit γ_j un élément de Γ^j tel que v appartienne à γ_j.

Nous distinguons alors les quatre cas suivants.

1er cas - γ_j est une conséquence de γ_i (même raisonnement si γ_i est une conséquence de γ_j) et de plus $u \notin C_{\gamma_j}$.

Soient a et b les extrémités de l'intervalle induit par γ_j sur γ_i ; soient c et d les extrémités de γ_j. (Remarquons que si i = j-1, on a a = c et b = d ce qui ne gêne en rien la démonstration suivante).

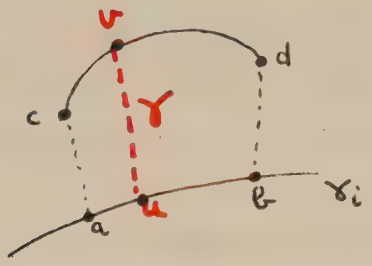
Puisque j est la hauteur de v, v est différent de c et de d (en effet si v était égal à c ou à d, v appartiendrait à une anse de Γ^{j-1} et serait de hauteur j-1).

Puisque $u \notin C_{\gamma_j}$, u est un sommet intérieur à $[a, b]_{\gamma_i}$.

Considérons les deux chaînes élémentaires

$$[p_o, a]_{C_{\gamma_j}} \cup [a, c]_{C_{\gamma_j}} \cup [c, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, u]_{\gamma} \cup [u, b]_{\gamma_i} \cup [b, p_1]_{C_{\gamma_j}}$$

$$[p_o, a]_{C_{\gamma_j}} \cup [a, u]_{\gamma_i} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, d]_{C_{\gamma_j}} \cup [d,b]_{C_{\gamma_j}} \cup [b,p_1]_{C_{\gamma_j}}$$



Ce sont deux chaînes de G" qui nous permettent de dire que toute arête [k, l] de γ vérifie k L l et l L k, ce qui est en contradiction avec le fait que G" soit $SP_{(p_o,p_1)}$.

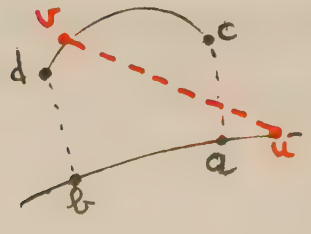
2ème cas - γ_j est conséquence de γ_i et $u \in C_{\gamma_j}$ -

Définissons a, b, c, d, comme dans le premier cas. La remarque $v \neq c, d$ est encore valable. Nous examinons les trois cas suivants :

. u ≠ a, b et u appartient à la sous-chaîne $[p_o, a]_{C_{\gamma_j}}$ de C_{γ_j}.

Dans ce cas nous considérons les chaînes C_{γ_j} et

$$[p_o, u]_{C_{\gamma_j}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, c]_{C_{\gamma_j}} \cup [c, a]_{C_{\gamma_j}} \cup [a, b]_{\gamma_i} \cup [b, p_1]_{C_{\gamma_j}}$$ de G".

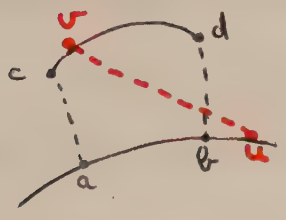


Toute arête [k, l] de la sous-chaîne $[c, v]_{\gamma_j}$ de γ_j vérifie k L l et l L k, ce qui est impossible puisque G" est $SP_{(p_o, p_1)}$.

. u ≠ a, b et u appartient à la sous-chaîne $[b, p]_{C_{\gamma_j}}$ de γ_j -

Dans ce cas, nous considérons les chaînes C_{γ_j} et

$[p_o, a]_{C_{\gamma_j}} \cup [a, b]_{\gamma_i} \cup [b, d]_{C_{\gamma_j}} \cup [d, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, u]_{\gamma} \cup [u, p_1]_{C_{\gamma_j}}$ de G"



Toute arête [k, l] de la sous-chaîne $[v, d]_j$ vérifie k L l et l L k, ce qui est impossible puisque G" est $SP_{(p_o, p_1)}$.

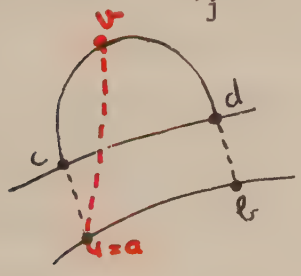
. u = a ou b -

Si l'on appelle $\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_{j-1}$ la suite d'anses par l'intermédiaire de laquelle γ_j est conséquence de γ_i, lorsque u est égal à a ou à b, u appartient à γ_{i+1} (ceci d'après la définition de a et b).

Puisque nous avons vu que u et v ne peuvent appartenir à une même anse, nous devons avoir i+1 ≠ j et u ≠ c, d.

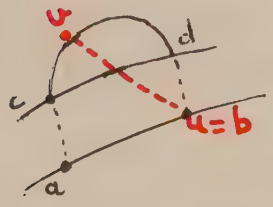
Pour u = a, nous devons donc avoir a ≠ c. Considérons les chaînes

C_{γ_j} et $[p_o, u]_{C_{\gamma_j}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, c]_{C_{\gamma_j}} \cup [c, d]_{\gamma_{j-1}} \cup [d, b]_{C_{\gamma_j}} \cup [b, p_1]_{C_{\gamma_j}}$



Ces deux chaînes élémentaires de G" sont telles que toute arête [k, l] de la sous-chaîne $[c, v]_{\gamma_j}$ de γ_j vérifie k L l et l L k, ce qui est impossible puisque G" est $SP_{(p_o, p_1)}$.

Si u = b, un raisonnement similaire s'applique en considérant les chaînes



C_{γ_j} et $[p_o, a]_{C_{\gamma_j}} \cup [a, c]_{C_{\gamma_j}} \cup [c, d]_{\gamma_{j-1}} \cup [d, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, u]_{\gamma} \cup [u, p_1]_{C_{\gamma_j}}$.

3ème cas - γ_i et γ_j ne sons pas conséquences l'une de l'autre et il existe une anse γ_n Γ^n (n < i, j) telle que γ_i et γ_j soient conséquences de γ_n -

Considérons un indice n maximum pour ces conditions.

Nous avons donc deux suites d'anses.

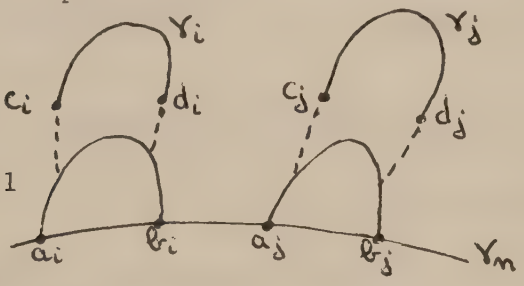
$\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i$ $\quad \forall k', n \leq k' \leq i, \gamma_{k'} \in \Gamma^{k'}$

$\gamma_n, \gamma'_{n+1}, \ldots, \gamma'_{j-1}, \gamma_j$ $\quad \forall k'', n+1 \leq k'' \leq j-1, \gamma'_{k''} \in \Gamma^{k''}$

Dans chacune de ces suites, chaque élément est une anse construite sur l'élément précédent.

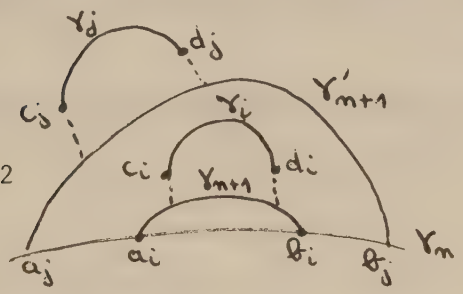
En vertu de la maximalité de n, γ_{n+1} est différent de γ'_{n+1} ; ces deux anses sont deux anses de G' construites sur la même anse γ_n, elles doivent donc être compatibles.

Fig. 1



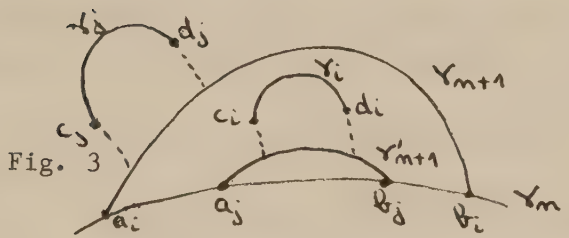
Soient c_i et d_i les extrémités de γ_i.
Soient c_j et d_j les extrémités de γ_j.
Soient a_i et b_i les extrémités de l'intervalle induit pas γ_i sur γ_n, c'est-à-dire les extrémités de γ_{n+1}.

Fig. 2



Soient a_j et b_j les extrémités de l'intervalle induit pas γ_j sur γ_n, c'est-à-dire les extrémités de γ'_{n+1}. γ_{n+1} et γ'_{n+1} étant compatibles, l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée.

Fig. 3



1) $E([a_i, b_i]_{\gamma_n}) \cap E([a_j, b_j]_{\gamma_n}) = \emptyset$ (Figure 1)

2) $[a_i, b_i]_{\gamma_n} \subset [a_j, b_j]_{\gamma_n}$ (Figure 2)

3) $[a_j, b_j]_{\gamma_n} \subset [a_i, b_i]_{\gamma_n}$ (Figure 3)

Remarquons que u (resp. v) étant de hauteur i (resp. j), il ne peut appartenir à γ_{i-1} (resp. γ_{j-1}), donc $u \neq c_i, d_i$ (resp. $v \neq c_j, d_j$).

Envisageons successivement les trois cas.

1) $E([a_i, b_i])_{\gamma_n}) \cap E([a_j, b_j]_{\gamma_n}) = \emptyset$

Dans ce cas, lorsqu'on parcourt γ_n, on rencontre les sommets a_i, b_i, a_j, b_j dans l'un des deux ordres suivants :

$a_i - b_i - a_j - b_j$ ou $a_j - b_j - a_i - b_i$.

γ_i et γ_j jouant ici des rôles symétriques, nous pouvons supposer que ces sommets sont rencontrés dans l'ordre $a_i - b_i - a_j - b_j$ (le raisonnement est le même dans l'autre cas).

Remarquons que certaines des égalités suivantes peuvent être vérifiées :

$a_i = c_i$, $b_i = d_i$, $d_i = c_j$, $a_j = c_j$, $b_j = d_j$.

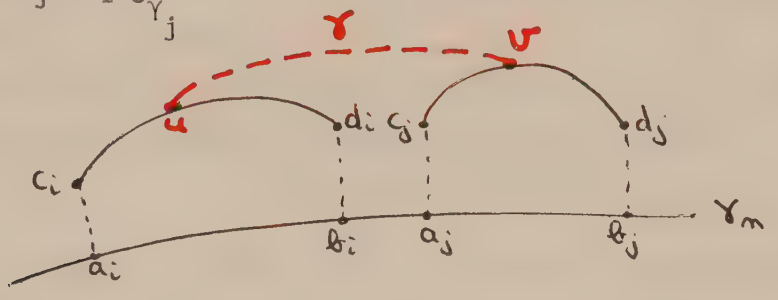
Considérons les deux chaînes élémentaires

$[p_o, a_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [a_i, c_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [c_i, u]_{C_{\gamma_i}} \cup [u, d_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [d_i, b_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [b_i, a_j]_{\gamma_n}$

$\cup [a_j, c_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [c_j, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, d_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [d_j, b_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [b_j, p_1]_{C_{\gamma_j}}$ et

$[p_o, a_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [a_i, c_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [c_i, u]_{C_{\gamma_i}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, c_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [c_j, a_j]_{C_{\gamma_j}}$

$\cup [a_i, b_j]_{\gamma_n} \cup [b_j, p_1]_{C_{\gamma_j}}$.

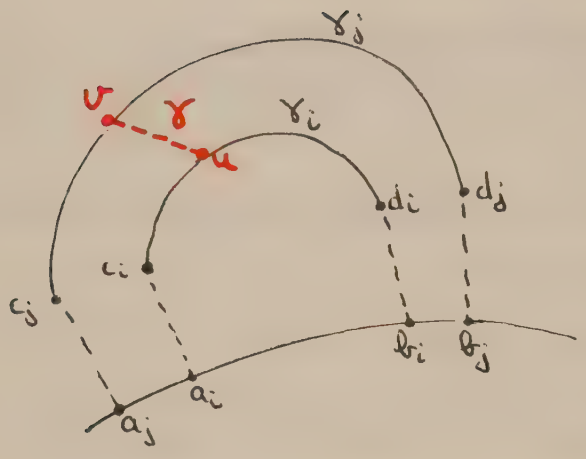


Ces deux chaînes de G" nous permettent de dire que toute arête $[k, l]$ de $[c_j, v]_{\gamma_j}$ (il en existe au moins une puisque c_j est différent de v) vérifie $k \; L \; l$ et $l \; L \; k$, ce qui contredit le fait que G" soit $SP_{(p_o, p_1)}$.

2) $[a_i, b_i]_{\gamma_n} \subset [a_j, b_j]_{\gamma_n}$ (le cas $[a_j, b_j]_{\gamma_n} \subset [a_i, b_i]_{\gamma_n}$ se traite exactement de la même manière, puisque γ_i et γ_j jouent ici des rôles symétriques ; il suffit d'intervertir les rôles de i et j, et ceux de u et v).

Lorsque nous parcourons γ_n, nous rencontrons les sommets a_i, b_i, a_j, b_j dans l'ordre $a_j - a_i - b_i - b_j$.

Remarquons que certaines des égalités suivantes peuvent être vérifiées $a_i = c_i$, $b_i = d_i$, $a_j = c_j$, $b_j = d_j$, $a_i = a_j$, $b_i = b_j$.



Considérons les deux chaînes

$[p_o, a_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [a_j, c_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [c_j, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, u]_{\gamma} \cup [u, d_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [d_i, b_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [b_i, p_1]_{C_{\gamma_i}}$ et $[p_o, a_j]_{C_{\gamma_i}} \cup [a_j, a_i]_{C_{\gamma_i}} \cup [a_i, u]_{C_{\gamma_i}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, d_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [d_j, b_j]_{C_{\gamma_j}} \cup [b_j, p_1]_{C_{\gamma_j}}$.

Ces deux chaînes élémentaires de G" permettent de dire que toute arête $[k, 1]$ de γ vérifie $k \mathrel{L} 1$ et $1 \mathrel{L} k$, ce qui est impossible puisque G" est $SP(p_o, p_1)$.

4ème cas - γ_i et γ_j ne sont pas conséquences l'une de l'autre et il n'existe pas d'indice n pour lequel on puisse trouver une anse de Γ^n dont γ_i et γ_j soient conséquences -

Cela signifie que γ_i et γ_j sont définies par deux suites

$(\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i)$

$(\gamma'_o, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{j-1}, \gamma'_j)$

avec : $\forall p,q$, $o \leq p \leq i$, $o \leq q \leq j$, $\gamma_p \neq \gamma'_q$

Considérons un couple (p, q) tel que $\gamma_p \cap \gamma'_q \neq \emptyset$

D'après le paragraphe II, 3°) (page 25), nous savons qu'alors $\gamma_p \cap \gamma'_q$ est inclus dans $\{p_o, p_1\}$. Nous avons donc

$(\gamma_o \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_i) \cup (\gamma'_o \cup \gamma'_1 \cup \ldots \cup \gamma'_j) \subset \{p_o, p_1\}$.

D'après le paragraphe II, 5°) (page 28), nous savons qu'il existe deux chaînes élémentaires C_{γ_i} et C_{γ_j} possédant les propriétés suivantes :

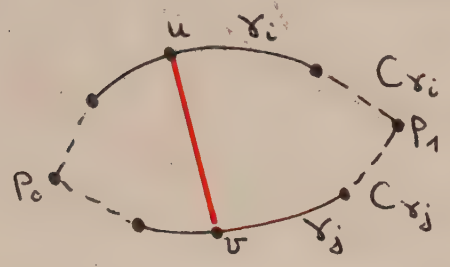
- $\gamma_i \subset C_{\gamma_i} \subset \gamma_o \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_i$
- $\gamma_j \subset C_{\gamma_j} \subset \gamma'_o \cup \gamma'_1 \cup \ldots \cup \gamma'_j$

Nous en déduisons que $C_{\gamma_i} \cap C_{\gamma_j}$ est inclus dans $\{p_o, p_1\}$.

C_{γ_i} et C_{γ_j} étant deux chaînes d'extrémités P_o et P_1, nous avons donc $C_{\gamma_i} \cap C_{\gamma_j} = \{P_o, P_1\}$.

De plus, C_{γ_i} (resp. C_{γ_j}) contenant γ_i (resp. γ_j), u est un sommet de C_{γ_i} (resp. C_{γ_j}).

Considérons alors les chaînes $[P_o, u]_{C_{\gamma_i}} \cup [u, v]_{\gamma} \cup [v, P_1]_{C_{\gamma_j}}$ et



$[P_o, v]_{C_{\gamma_j}} \cup [v, u]_{\gamma} \cup [u, P_1]_{C_{\gamma_i}}$

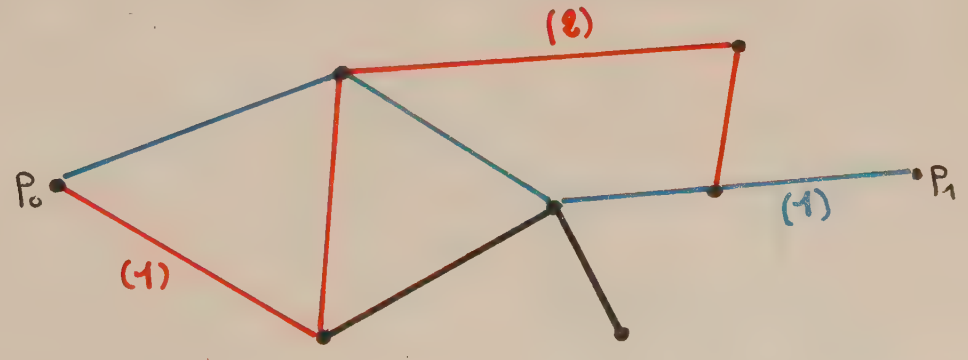
Ce sont deux chaînes élémentaires de G" qui permettent de dire que toute arête $[k, l]$ de γ vérifie k L l et l L k, ce qui est impossible puisque G" est $SP_{(P_o, P_1)}$. Dans les quatre cas nous aboutissons à des impossibilités, ce qui nie l'existence de G". G' est donc un sous-graphe partiel $SP_{(P_o, P_1)}$ maximal de G'.

IV - Exemples -

Dans chacun de ces exemples, nous considérons un graphe, G et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe ; nous construisons G', sous-graphe partiel maximal $SP(P_o, P_1)$ de G.

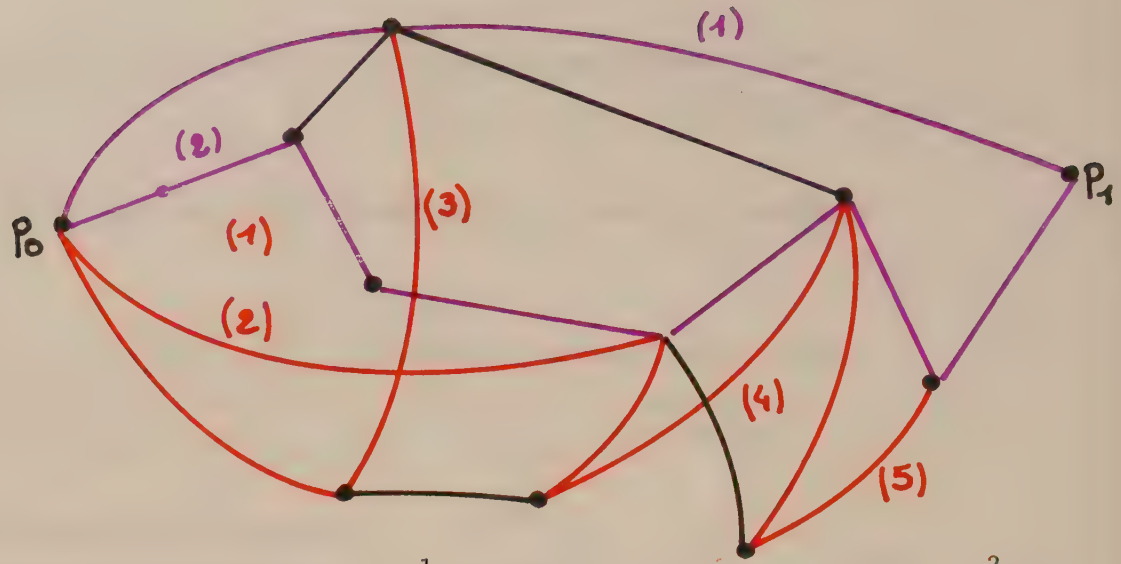
Dans G', à chaque hauteur, nous faisons correspondre une couleur et aux anses de hauteur h est attribuée la couleur correspondant à la hauteur h. De plus, dans chaque ensemble Γ^i nous numérotons les éléments de 1 à $|\Gamma^i|$ et nous notons $\Gamma^i = \{(1), (2),, (3),..., (|\Gamma^i|)\}$.

G



$\Gamma^o = \{(1)\}$ $\Gamma^1 = \{(1), (2)\}$ $\Gamma^3 = \emptyset$

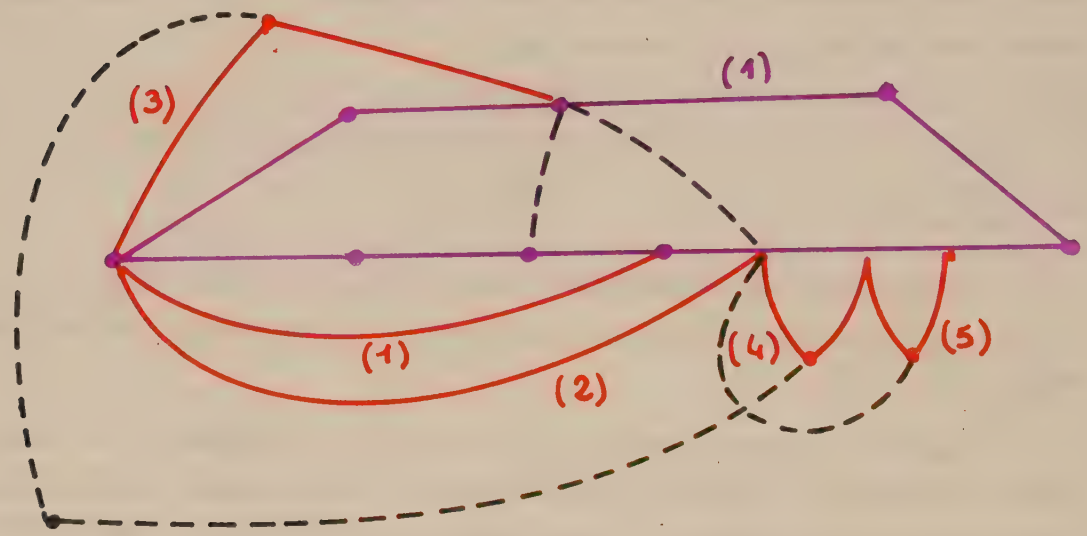
G



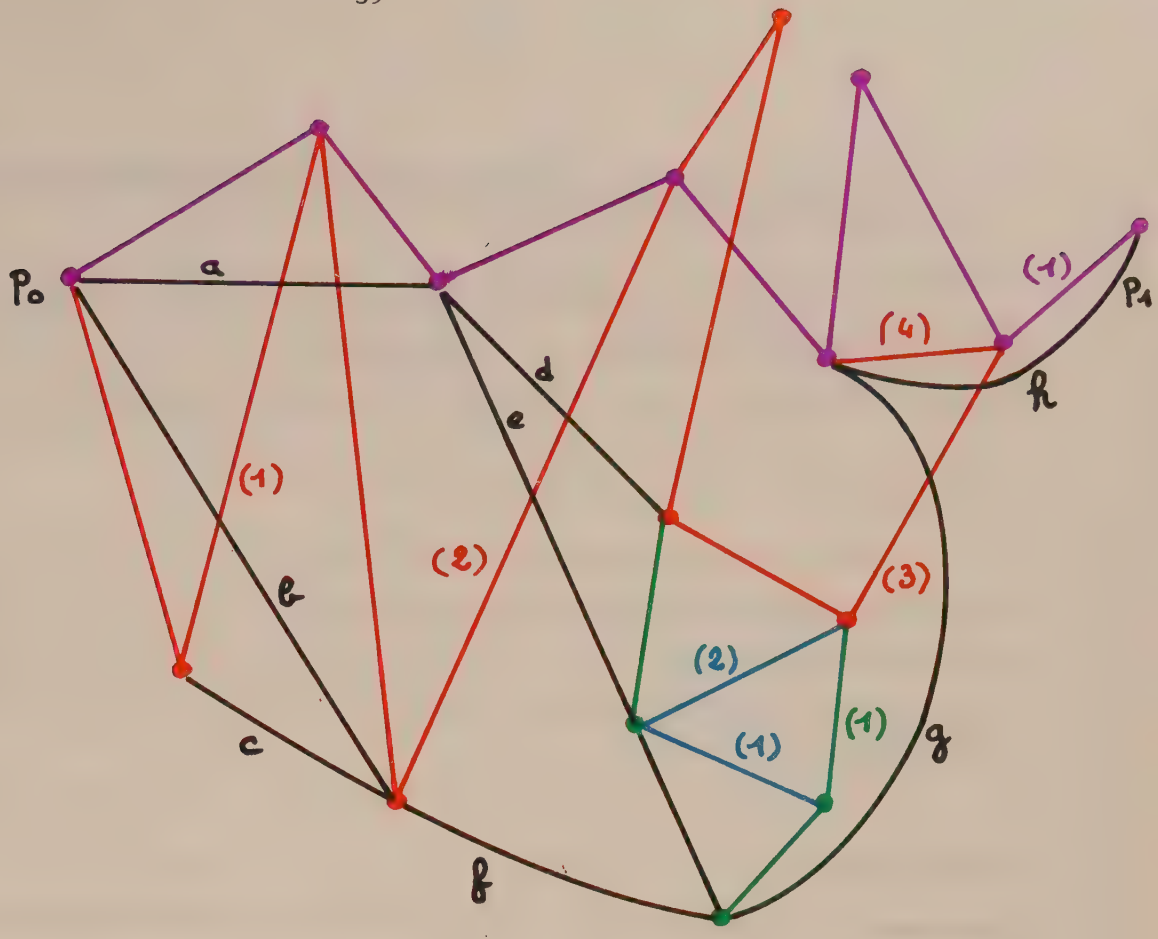
$\Gamma^0 = \{(1), (2)\}$ $\Gamma^1 = \{(1), (2), (3), (4), (5)\}$ $\Gamma^2 = \emptyset$

Nous pouvons alors représenter G' d'une manière plus simple.

G'



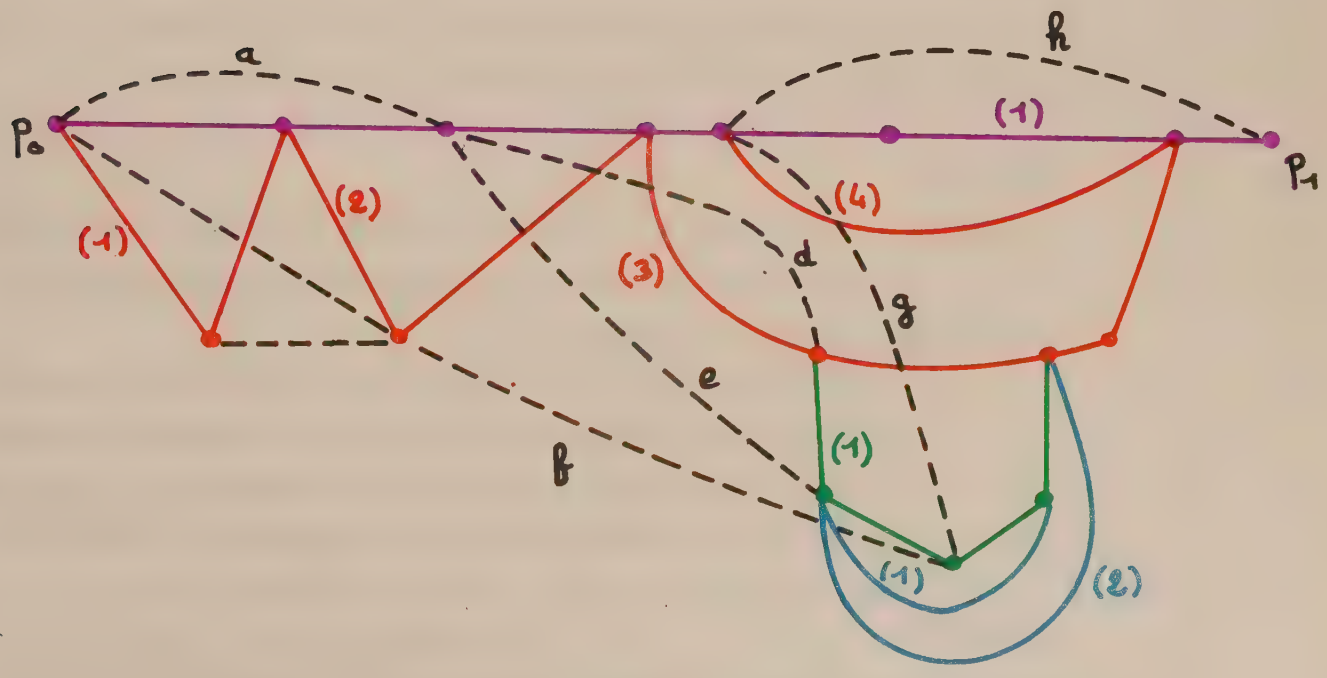
Les arêtes en pointillé représentent les arêtes de G qui n'appartiennent pas à E (G').



$\Gamma^0 = \{(1)\}$ $\Gamma^1 = \{(1), (2), (3), (4)\}$ $\Gamma^2 = \{(1)\}$ $\Gamma^3 = \{(1), (2)\}$

$\Gamma^4 = \emptyset$

Nous pouvons alors représenter G' d'une manière plus simple.



Les arêtes en pointillé représentent les arêtes de G qui n'appartiennent pas à E (G').

II - DEUXIEME ALGORITHME DE CONSTRUCTION D'UN SOUS-GRAPHE PARTIEL MAXIMAL DE G -

Cet algorithme présente de nombreuses analogies avec le premier. Les deux algorithmes permettent de construire un sous-graphe partiel G' SP (P_o, P_1) maximal d'un graphe donné G dont P_o et P_1 sont deux sommets ; G' est de la forme $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^k$ où pour tout indice i, $o \leq i \leq k$, Γ^{i+1} est un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i.

Nous pouvons exprimer en termes intuitifs la différence qui existe entre ces deux algorithmes ; alors que par application du premier, nous commençons par construire Γ°, puis $\Gamma^1, \ldots \Gamma^{i-1}$, Γ^i, et enfin Γ^k, par application du second nous pouvons commencer la construction d'un ensemble Γ^i sans avoir achevé celle des ensembles Γ^j $(j < i)$.

ALGORITHME II -

Phase (1) -

- Considérons, si elle existe, une chaîne élémentaire γ_o^1 de G allant de P_o à P_1 et posons

$$\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1\} \; ; \; \Gamma = \Gamma^\circ = \{\gamma_o^1\} \; ; \; V(\gamma_o^1) = \emptyset \; , \; h(\gamma_o^1) = 0$$

Notons H le graphe formé par la chaîne γ_o^1.

- S'il n'existe pas de telle chaîne, G' = $\emptyset$ (G ne contient pas de sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) non vide).

Phase (2) -

- Considérons le graphe H, l'ensemble d'anses Γ et, pour tout élément γ de Γ, la hauteur h (γ) de γ et l'ensemble V (γ) des intervalles induits sur γ par les éléments de $\Gamma^{h(\gamma)+1}$.

- S'il existe une anse γ de Γ sur laquelle nous puissions construire une anse (i.e. une chaîne élémentaire de G dont les extrémités sont des sommets de G et dont les sommets intérieurs appartiennent à G - H) compatible avec les anses déjà construites sur γ, passons à la phase (3).

Phase (3) -

- Construisons sur l'élément γ de Γ une anse γ' compatible avec les

anses déjà construites sur γ. Soient a et b les extrémités de γ' ; a et b sont deux sommets de γ, les sommets intérieurs à γ' appartiennent à G - H. γ' étant compatible avec les autres anses construites sur γ, pour tout élément v (γ) de V (γ), l'une au moins des trois propriétés suivantes est vérifiée.

(i) $[a, b]_\gamma \subset v(\gamma)$

(ii) $v(\gamma) \subset [a, b]_\gamma$

(iii) $E(v(\gamma)) \cap E([a, b]_\gamma) = \emptyset$

- Si $[a, b]_\gamma \neq \gamma$, posons

$\forall i \neq h(\gamma)+1$, $\Gamma^i = \Gamma^i$; $\Gamma^{h(\gamma)+1} = \Gamma^{h(\gamma)+1} \cup \{\gamma'\}$; $\Gamma = \Gamma \cup \{\gamma'\}$

$\forall \gamma'' \in \Gamma$, $\gamma'' \neq \gamma'$, $h(\gamma'') = h(\gamma'')$; $h(\gamma') = h(\gamma)+1$

$\forall \gamma'' \in \Gamma$, $\gamma'' \neq \gamma, \gamma'$, $V(\gamma'') = V(\gamma'')$; $V(\gamma') = \emptyset$; $V(\gamma) = V(\gamma) \cup \{[a, b]\}$

$H = H \cup \gamma'$

Puis passons à la phase (2).

Si $[a, b]_\gamma = \gamma$, posons :

$\forall i \neq h(\gamma)$, $\Gamma^i = \Gamma^i$; $\Gamma^{h(\gamma)} = \Gamma^{h(\gamma)} \cup \{\gamma'\}$; $\Gamma = \Gamma \cup \{\gamma'\}$

$\forall \gamma'' \in \Gamma$, $\gamma'' \neq \gamma'$, $h(\gamma'') = h(\gamma'')$; $h(\gamma') = h(\gamma)$

$\forall \gamma'' \in \Gamma$, $\gamma'' \neq \gamma'$, $V(\gamma'') = V(\gamma'')$; $V(\gamma') = \emptyset$

$H = H \cup \gamma'$

Puis passons à la phase (2).

Phase (4) -

Posons G' = H - La construction de G' est terminée.

Remarques -

- Γ^o est un ensemble de chaînes élémentaires de G allant de P_o à P_1 et disjointes sauf en leurs extrémités.

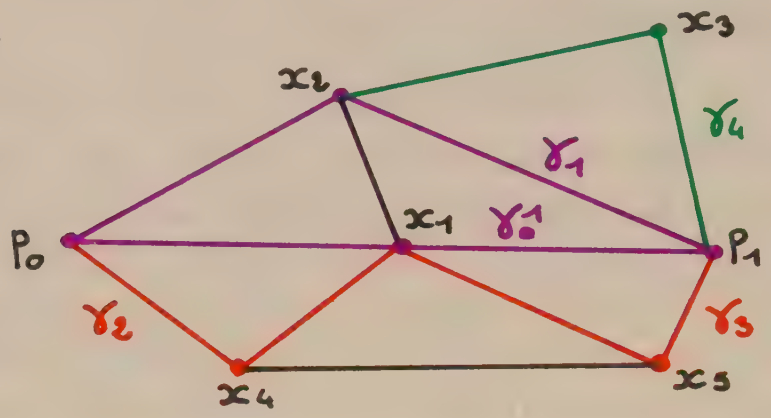
Γ^{i+1} est un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i.

Γ^i est l'ensemble des anses de hauteur i.

- Les sommets intérieurs à tout élément γ_i de Γ^i sont de degré 2 dans le graphe $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup \Gamma^i$.

- Une anse de Γ dont les extrémités appartiennent à un élément γ_p de Γ^p est de hauteur inférieure ou égale à p + 1.

Exemple -



Posons $\gamma_o^1 = (P_o, x_1, P_1)$; $\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1\}$; $\Gamma^\circ = \{\gamma_o^1\}$; $V(\gamma_o^1) = \emptyset$; $h(\gamma_o^1) = 0$; $H = \gamma_o^1$.

Construisons sur γ_o^1 l'anse $\gamma_1 = (P_o, x_2, P_1)$, elle induit sur γ_o^1 un intervalle égal à γ_o^1, donc $h(\gamma_1) = 0$.

Posons $H = H \cup \gamma_1$. Construisons sur γ_o^1 l'anse $\gamma_2 = (P_o, x_4, x_1)$, elle induit sur γ_o^1 l'intervalle $[P_o, x_1]_{\gamma_o^1} \neq \gamma_o^1$, d'où $h(\gamma_2) = 1$.

Posons $H = H \cup \gamma_2$ et $V(\gamma_o^1) = \{[P_o, x_1]_{\gamma_o^1}\}$.

$\gamma_3 = (x_1, x_5, P_1)$ est une anse de γ_o^1 qui induit un intervalle $[x_1, P_1]_{\gamma_o^1}$;

puisque $E([x_1, P_1]_{\gamma_o^1}) \cap E([P_o, x_1]_{\gamma_o^1}) = \emptyset$, γ_3 est compatible avec γ_2, de plus $h(\gamma_3) = 1$. Posons $V(\gamma_o^1) = V(\gamma_o^1) \cup \{[x_1, P_1]_{\gamma_o^1}\}$ et $H = H \cup \{\gamma_3\}$.

$\gamma_4 = (x_2, x_3, P_1)$ est une anse de γ_1 qui induit sur γ_1 l'intervalle $[x_2, P_1]_{\gamma_1}$ différent de γ_1, donc $h(\gamma_4) = 1$. Posons $H = H \cup \gamma_4$.

Nous ne pouvons plus construire d'anses, par suite $G' = H = \gamma_o^1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

Nous allons montrer qu'étant donné un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G, l'algorithme ci-dessus permet de construire un graphe G', sous-graphe partiel maximal $SP(P_o, P_1)$ de G .

- Montrons que G' est un sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) de G -

. Toutes les chaînes élémentaires utilisées pour la construction de G' sont des chaînes élémentaires de G, par suite G' est un sous-graphe partiel de G.

. Soit k la valeur maxima atteinte par la fonction h.

G' est le graphe formé par la réunion des graphes Γ^o, Γ^1,..., Γ^k ; nous pouvons écrire $G' = \Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2, \ldots, \cup \Gamma^k$, où Γ^o est un ensemble de chaînes élémentaires allant de P_o et P_1 disjointes sauf en leurs extrémités et Γ^{i+1} est un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i ; par suite, en nous reportant à la page 22, nous savons démontrer que G' est SP (P_o, P_1).

- Montrons que G' est maximal (pour l'inclusion des graphes) -

Nous allons utiliser les notations et propriétés établies (page 24 et suivantes) pour l'étude du premier algorithme. Toutes les propriétés des ensembles Γ^i construits par le premier algorithme sont encore valables ici, à l'exception de la maximalité de ces ensembles.

Aussi, pour montrer la maximalité de G', nous suffit-il de reprendre les notations et démonstrations des pages 24 et suivantes, en modifiant celles qui font appel à la maximalité des ensembles Γ^i.

Les paragraphes §1et §2comportent les modifications que nous devons apporter respectivement aux paragraphes II et III de la première partie de ce chapitre (page 24 et suivantes) pour pouvoir montrer ici que G' est maximal.

§ . 1 -

Nous conservons sans modification la définition de la hauteur d'une anse donnée dans G' ; nous remarquons,de plus,que cette définition coïncide avec la notion de hauteur définie par la fonction h de la page 40. Nous ne modifions pas, non plus, la définition de la hauteur d'un sommet.

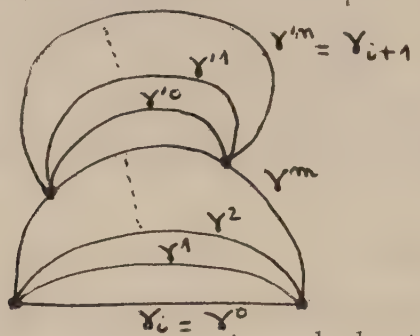
Nous donnons par contre, une définition légèrement différente de la notion de "conséquence". Etant données deux anses γ_i et γ_{i+1} de hauteurs respectives i et i+1, nous disons que γ_{i+1} est conséquence immédiate de γ_i si et seulement si il existe deux suites d'anses $\gamma^o = \gamma_i, \gamma^1, \ldots, \gamma^m$ et

$\gamma'^{0}, \gamma'^{1}, \ldots \gamma'^{n} = \gamma_{i+1}$ possèdant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout α, $1 \leq \alpha \leq m$, γ^{α} appartient à Γ^{i} et est une anse construite sur $\gamma^{\alpha-1}$.

(ii) Pour tout β, $o \leq \beta \leq n-1$, γ^{β} appartient à Γ^{i+1} et $\gamma^{\beta+1}$ est une anse construite sur γ^{β}.

(iii) γ'_{o} est une anse construite sur γ^{m}.



Etant données deux anses γ_i et γ_j de hauteurs respectives i et j ($i < j$), nous dirons que γ_j est conséquence de γ_i si et seulement si il existe une suite d'anses $\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_j$ telle que pour tout k', $i \leq k' \leq j-1$, $\gamma_{k'}$, appartienne à $\Gamma^{k'}$ et que $\gamma_{k'+1}$ soit une conséquence immédiate de $\gamma_{k'}$.

Avec ces notations, les remarques 1°) et 2°) du paragraphe II de la première partie de ce chapitre sont encore valables.

Mais nous devons reprendre l'étude du premier cas de la remarque 3°) sans utiliser la maximalité de Γ° et de Γ^{p}, afin d'établir la remarque suivante.

Remarque -

Soient deux anses γ_p et γ'_q, d'extrémités respectives a_p, b_p et a_q, b_q, telles que γ'_q soit conséquence de γ_p.

P est strictement inférieur à q et $\gamma_p \cap \gamma'_q$ est inclus dans l'ensemble $\{a_q, b_q\}$. Supposons que nous ayons $\{a_p, b_p\} = \{a_q, b_q\}$.

Tout sommet intérieur à γ'_q est de hauteur q et ne peut donc appartenir à $\Gamma^{\circ} \cup \Gamma^{1} \cup \ldots \cup \Gamma^{q-1}$; puisque $\Gamma^{\circ} \cup \Gamma^{1} \cup \Gamma^{2}, \ldots, \cup \Gamma^{q-1}$ contient Γ^{p}, aucun sommet intérieur à γ'_q n'appartient à $X(\Gamma^{p})$, ce que nous écrivons :

$$\forall \gamma''_p \in \Gamma^{p}, \quad \gamma''_p \cap \gamma'_q = \{a_q, b_q\} = \{a_p, b_p\} \quad (A)$$

. Si p = o, (A) implique $\forall \gamma''_o \in \Gamma^{\circ}$, $\gamma''_o \cap \gamma'_q = \{P_o, P_1\} = \{a_q, b_q\}$.

Une anse de Γ° a pour extrémités P_o et P_1.

Supposons que P_o et P_1 soient les extrémités d'une anse de Γ^i, $i \geq 1$; l'un au moins des sommets P_o et P_1 serait alors sommet intérieur d'une anse de Γ^{i-1} ; or d'après la construction des anses de G', P_o et P_1 ne sont intérieurs à aucune d'elles. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Par suite, une anse est élément de Γ° si et seulement si elle a pour extrémités les sommets P_o et P_1.

Puisque γ'_q a pour extrémités P_o et P_1, q est nul. Ceci est impossible puisque par hypothèse p est strictement inférieur à q.

. Si $p > o$, nous considérons l'anse γ_{p-1} dont γ_p est conséquence immédiate ; a_p et b_p sont deux sommets de γ_{p-1} et par suite, puisque $\{a_p, b_p\} = \{a_q, b_q\}$, γ_q est une anse dont les extrémités appartiennent à γ_{p-1}. D'après la 3°) remarque (page 42), la hauteur q de γ'_q est inférieure ou égale à p. Ceci est impossible puisque par hypothèse p est strictement inférieur à q.

Par conséquent nous avons $\{a_p, b_p\} \neq \{a_q, b_q\}$ (C).

Les autres remarques du paragraphe II sont encore valables sans que nous y apportions de modifications.

§ . 2 -

Comme dans le paragraphe III de la première partie, nous supposons l'existence d'un graphe G" vérifiant

1) $G'' \subset G$

2) G" SP (P_o, P_1)

3) $E(G') \subsetneq E(G'')$

Alors il existe une arête e qui appartient à E (G"), mais n'appartient pas à E (G'). Il existe une chaîne élémentaire de G" allant de P_o à P_1 et contenant e. Soit γ la sous-chaîne maximale de celle-ci, contenant e et dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à G'.

Soient u et v les extrémités de γ (γ étant une chaîne élémentaire, u et v sont deux sommets distincts de G').

Montrons que $\{u, v\}$ est différent de $\{P_o, P_1\}$.

γ étant une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1, G' est non vide. Nous obtenons donc G' après avoir construit un graphe H = G' (formé d'anses constituant un ensemble $= \Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \ldots \cup \Gamma^k$, auquel il est impossible d'appliquer la phase (3) de l'algorithme.

Supposons que $\{u, v\}$ soit égal à $\{p_o, p_1\}$ et considérons un élément γ_o de Γ^o (G' étant non vide, cela est toujours possible) ; alors γ a pour extrémités deux sommets de γ_o, ses sommets intérieurs n'appartiennent pas à H (= G'), et tout élément v (γ_o) de V (γ_o) est inclus dans l'intervalle $[u, v]_{\gamma_o} = [P_o, P_1]_{\gamma_o} = \gamma_o$. Il est donc possible d'appliquer la phase (3) de l'algorithme à H en construisant l'anse γ sur γ_o.

Nous aboutissons à une contradiction ; nous en déduisons que $\{u, v\}$ est distinct de $\{P_o, P_1\}$.

Examinons les différentes positions que peuvent avoir les deux sommets u et v de G'.

Supposons qu'il existe i, $o \leq i \leq k$, tel que u et v soient deux sommets d'une même anse de Γ^i.

Soit i_o le plus petit indice tel qu'il existe une anse γ_{i_o} de Γ^{i_o} dont u et v soient deux sommets.

Puisque $\{u, v\}$ est différent de $\{P_o, P_1\}$, la minimalité de i_o implique que l'un au moins des deux sommets u et v est intérieur à γ_{i_o}. γ a ses extrémités sur γ_i ($[u, v]_{\gamma_i} \subset_{\neq} \gamma_i$) et ses sommets intérieurs n'appartiennent pas à G' ; or γ n'est pas élément de Γ^{i+1}.

Si l'on n'a pas construit une anse γ de γ_i c'est donc que γ est incompatible avec au moins une des anses construites sur γ_i. Il existe donc un élément γ' de Γ^{i+1}, d'extrémités u' et v', incompatible avec γ. Cela signifie que, lorsqu'on parcourt γ_i on rencontre les sommets u, u', v, v' dans l'un des deux ordres suivants : u - u' - v - v' ou u' - u - v' - v
avec $u \neq u'$, $v \neq v'$, $u' \neq v$ avec $u \neq u'$, $v \neq v'$, $u \neq v'$.

Ceci nous permet alors de construire comme à la page 31, deux chaînes élémentaires de G" qui contredisent le fait que ce graphe soit SP (P_o, P_1).

u et v ne peuvent donc appartenir à une même anse du graphe G'.

La suite du paragraphe III est encore valable ici et nous pouvons la reprendre sans modification. Ainsi nous montrons que le graphe G', construit par application de l'algorithme II au graphe G, est sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G.

Proposition - Soient un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G. Tout sous-graphe partiel G' SP (P_o, P_1) maximal de G peut être obtenu par application de l'algorithme II au graphe G.

En effet, appliquant l'algorithme II à G', nous pouvons écrire G' sous la forme $\Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^k$; Γ^o est un ensemble de chaînes de G' disjointes (sauf en leurs extrémités) allant de P_o à P_1 ; pour tout i, $o \leq i \leq k-1$, Γ^{i+1} est un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i.

Appliquons l'algorithme II au graphe G. Puisque G' est inclus dans G, Γ^o est un ensemble de chaînes de G disjointes (sauf en leurs extrémités) allant de P_o à P_1 et pour tout i, $o \leq i \leq k-1$, G contient Γ^{i+1}, ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i.

Nous pouvons donc commencer l'application de l'algorithme II à G par la construction d'un sous-graphe partiel $H = \Gamma^o \cup \ldots \cup \Gamma^k$ de G. Mais puisque H = G' et que G' est maximal, H est maximal ; après avoir construit H, on ne peut donc poursuivre l'application de l'algorithme.

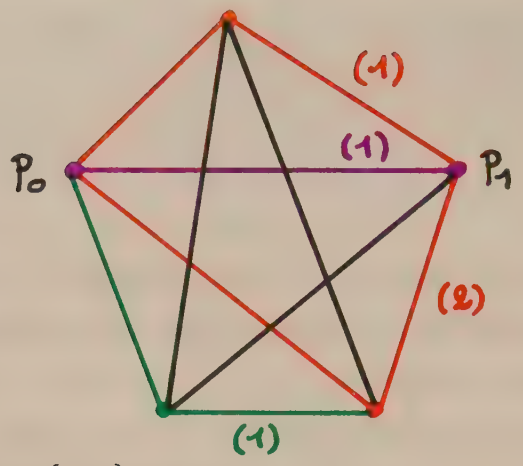
Nous voyons ainsi, que par application de l'algorithme à G, nous pouvons construire le sous-graphe partiel H = G' de G.

Exemples -

Dans ces exemples, nous considérons un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe ; nous construisons un sous-graphe partiel G' SP (P_o, P_1) maximal de G.

Dans G', à chaque hauteur nous faisons correspondre une couleur, et aux anses de hauteur h est attribuée la couleur correspondant à la hauteur h. De plus, dans chaque ensemble Γ^i nous numérotons les éléments de 1 à $|\Gamma^i|$ et nous notons $\Gamma^i = \{(1), (2), \ldots, (|\Gamma^i|)\}$.

- $G = K_5$



$\Gamma^0 = \{(1)\}$

$\Gamma^1 = \{(1), (2)\}$

$\Gamma^2 = \{(1)\}$

$\Gamma^3 = \emptyset$

G

Les nombres noirs numérotent les sommets de G.

$\Gamma^0 = \{(1), (2), (3)\}$

$\Gamma^1 = \{(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13)\}$

$\Gamma^2 = \{(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13)\}$

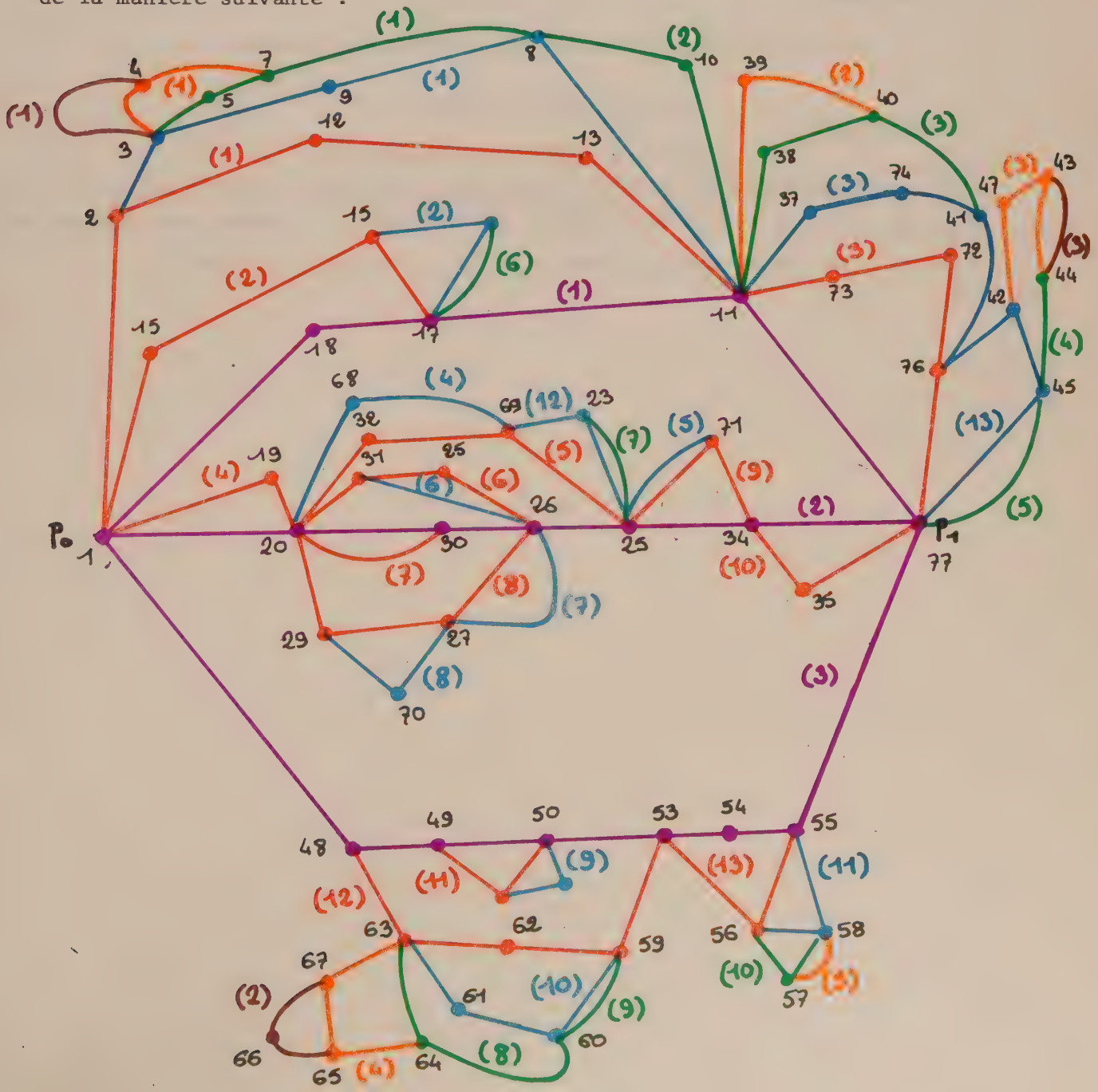
$\Gamma^3 = \{(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10)\}$

$\Gamma^4 = \{(1), (2), (3), (4), (5)\}$

$\Gamma^5 = \{(1), (2), (3)\}$

$\Gamma^6 = \emptyset$

Nous pouvons alors représenter le sous-graphe partiel G' ainsi construit, de la manière suivante :



III - APPLICATION DES ALGORITHMES A DES GRAPHES SP -

Etant donné un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G, les deux algorithmes nous permettent de construire un sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G.

Cette construction permet de déterminer si le graphe G est SP (P_o, P_1).

En effet, G est SP (P_o, P_1) si et seulement si tout sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G est égal à G. Par suite, si G est SP (P_o, P_1), le graphe G', obtenu par application à G de l'un quelconque des deux algorithmes I et II, est égal à G. Réciproquement, si G' = G, comme G' est SP (P_o, P_1), G l'est aussi.

Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition -

Considérons un graphe G quelconque, et deux sommets P_o et P_1 de G. G est SP (P_o, P_1) si et seulement si le graphe G', obtenu par application à G de l'un des deux algorithmes I et II, est égal au graphe G.

CHAPITRE III

CONSTRUCTION DE FONCTIONS PARTIELLES PRIVILEGIEES MAXIMALES D'UNE FONCTION BOOLEENNE DONNEE

CONSTRUCTION DE FONCTIONS PARTIELLES PRIVILEGIEES MAXIMALES D'UNE FONCTION BOOLEENNE DONNEE

A) Rappels et définitions -

- Une variable booléenne simple est une variable susceptible de prendre deux valeurs : 0 et 1.
- Une fonction booléenne simple F est une fonction booléenne des variables booléennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si à chaque valeur du n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspond une valeur bien déterminée de F.

Remarque -

Rappelons que le complément x' d'une variable booléenne simple x est la variable booléenne qui prend la valeur 0 (resp. la valeur 1), lorsque x vaut 1 (resp. 0). Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont F est fonction, ne sont pas nécessairement indépendantes; il peut, par exemple, exister un couple d'indices (i, j) tel que $x_j = x_i'$.

- Etant données deux variables booléennes simples x et y, x + y (somme de x et de y) est la fonction booléenne dont les valeurs sont données par le tableau suivant :

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

xy (produit de x et de y) est la fonction booléenne dont les valeurs sont données par le tableau suivant :

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Un monôme booléen est le produit d'un nombre fini n de variables booléennes simples. Si n = o, le monôme est égal à 1.

Un monôme m divise un monôme m' si et seulement si il existe un monôme m" tel que $m' = mm''$.

Deux monômes sont premiers si et seulement si ce sont deux produits de variables booléennes ne comportant aucune variable commune.

- Un polynôme booléen est la somme d'un nombre fini de monômes booléens.

- D'après le théorème de LAGRANGE (cf. KUNTZMANN) - Algèbre de Boole, p. 37), toute fonction booléenne peut s'écrire sous forme d'un polynôme booléen. Une telle écriture de F sera appelée écriture développée de F.

Considérons une fonction F donnée sous forme développée.

- F est alors une somme de monômes booléens ; nous noterons μF l'ensemble de ces monômes. πF désignera le monôme booléen produit des variables de F.

- Nous appelerons fonction booléenne partielle de F, une fonction booléenne f telle que μf soit inclus dans μF.

- Fonctions booléennes et graphes.

Considérons un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les arêtes de G. A G nous pouvons associer une fonction booléenne $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ construite de la façon suivante:

A toute chaîne élémentaire $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ de G allant de P_o à P_1, nous associons le monôme $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$; F est alors la fonction booléenne telle que μF soit l'ensemble des monômes associés à toutes les chaînes élémentaires de G allant de P_o à P_1.

Exemple -

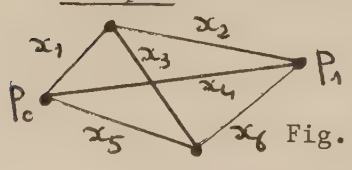


Fig. 1

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_2 + x_4 + x_5 x_6 + x_1 x_3 x_6 + x_2 x_3 x_5.$$

Nous dirons que F est la fonction associée au graphe G relativement à P_o et P_1.

- Une fonction privilégiée (cf. KUNTZMANN, Algèbre de Boole, p. 300), est une fonction qui possède une écriture en sommes et en produits, n'utilisant qu'une fois au plus chaque variable. Ainsi, une fonction booléenne f des m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ est privilégiée si et seulement si il existe une expression de f telle que

1) Les seules opérations figurant dans cette expression soient des sommes et des produits booléens.

2) Chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ figure au plus une fois dans cette expression.

Définition équivalente -

Une fonction booléenne est privilégiée si et seulement si elle peut être associée à un graphe série-parallèle.

Convention - f = 0 est une fonction privilégiée.

- F' est une fonction partielle privilégiée maximale de F s'il n'existe pas de fonction partielle privilégiée g de F telle que $\mu F' \subset \mu g \subset \mu F$.

- Par abus de langage, lorsqu'une variable x figure dans un monôme α, nous disons que x appartient à α.

- Si f est la fonction booléenne associée à un graphe G, il existe une bijection I de l'ensemble des variables figurant dans f sur l'ensemble des arêtes de G.

Nous noterons de la même lettre une variable figurant dans f et son image dans E (G) par la bijection I.

- Soit α un ensemble de variables figurant dans une fonction booléenne f et soit G un graphe associé à f.

On appelle α-graphe partiel de G un sous-graphe partiel de G dont l'ensemble d'arêtes est l'image de l'ensemble des variables de α par la bijection I.

B) Sous-graphes partiels et fonctions partielles -

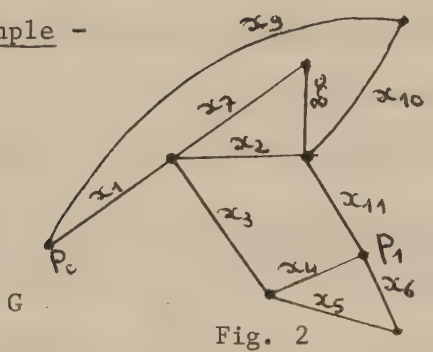
Au chapitre II nous avons établi deux algorithmes nous permettant de construire des sous-graphes partiels maximaux série-parallèles d'un graphe donné.

Reportons-nous, notamment, à l'algorithme II de ce chapitre. Considérons un graphe G et deux de ses sommets P_o et P_1. Soit F la fonction booléenne associée à G relativement à P_o et P_1. L'algorithme II nous permet de construire un sous-graphe partiel G' SP (P_o, P_1) maximal de G. Soit F' la fonction booléenne associée à G' relativement à P_o et P_1.

Puisque G' est SP (P_o, P_1), F' est une fonction privilégiée ; comme, de plus, G' est un sous-graphe partiel de G, $\mu F'$ est inclus dans μF, ce qui signifie que F' est une fonction partielle de F.

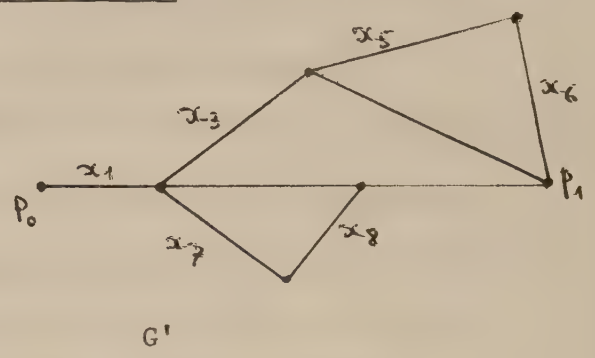
Nous remarquerons ainsi que l'algorithme II du chapitre II nous permet de construire une fonction partielle F' privilégiée d'une fonction booléenne F, sous réserve que F puisse être associée à un graphe.

Exemple -



G

Fig. 2



G'

Fig. 3

Considérons le graphe G de la figure 2.

La fonction booléenne associée à ce graphe relativement à P_o et P_1 est

$F = x_1 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_{11} + x_1 x_7 x_8 x_{11} + x_9 x_{10} x_{11}$
$+ x_9 x_{10} x_2 x_3 x_4 + x_9 x_{10} x_2 x_3 x_5 x_6$.

Appliquant l'algorithme II à G, nous allons en construire un sous-graphe aprtiel G' SP (P_o, P_1) maximal.

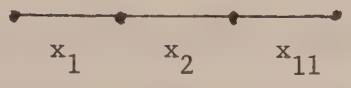
Rappelons que cet algorithme opère par étapes successives et qu'à chacune de celles-ci nous considérons que nous avons construit un sous-graphe partiel H que nous cherchons à accroître (au sens de l'inclusion des graphes).

Notre but est, ici, d'observer,à chaque étape, quelle est la fonction booléenne associée à H, afin de déterminer l'incidence qu'a, sur F, l'application à G de l'algorithme II.

- Considérons la chaîne élémentaire (x_1, x_2, x_{11}) de G et posons

$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_{11})\}$, $V[(x_1, x_2, x_{11})] = \emptyset$

H est le graphe formé par la chaîne (x_1, x_2, x_{11}).



la fonction booléenne associée est $f = x_1\ x_2\ x_{11}$; $\mu f = \{x_1\ x_2\ x_{11}\}$

- (x_3, x_4) est une chaîne élémentaire de G - H ; ceci implique que $x_3\ x_4$ et $x_1\ x_2\ x_{11}$ sont premiers.

(x_3, x_4) a pour extrémités deux sommets de (x_1, x_2, x_{11}) et induit sur cette chaîne l'intervalle (x_2, x_{11}).

Ceci implique que, dans toute chaîne élémentaire de H contenant (x_2, x_{11}), le remplacement de la sous-chaîne (x_2, x_{11}) par (x_3, x_4) fournit une chaîne élémentaire de G.

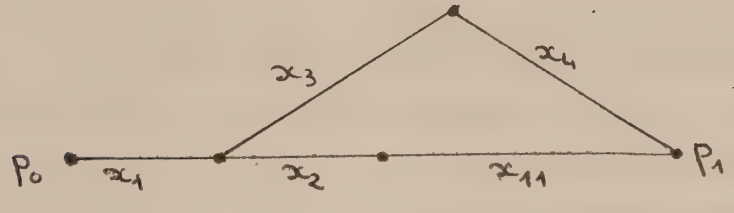
En termes de monômes booléens, ceci s'exprime par la condition suivante. Pour tout monôme booléen m, $m\ x_2\ x_{11} \in \mu f$ implique $m\ x_3\ x_4 \in \mu F$. Cette condition est bien vérifiée ici, puisque $\{m \ / \ m\ x_2\ x_{11} \in \mu f\} = \{x_1\}$ et que $x_1\ x_3\ x_4 \in \mu F$.

Puisque $V\ [(x_1, x_2, x_{11})]$ est vide, il n'y a pas de problème de compatibilité.

Construisons donc sur (x_1, x_2, x_{11}) l'anse (x_3, x_4) et posons

$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_{11}) , (x_3, x_4)\}$; $V\ [(x_1, x_2, x_{11})] = \{(x_2, x_{11})\}$;

$V\ [(x_3, x_4)] = \emptyset$; $H = H \quad \{(x_3, x_4)\}$; $\mu H = \{(x_1, x_2, x_{11}) , (x_1\ x_3, x_4)\}$.



La fonction booléenne associée à H est

$f = f + x_1\ x_3\ x_4 = x_1\ x_2\ x_{11} + x_1\ x_3\ x_4$.

- (x_5, x_6) est une chaîne élémentaire de G - H dont les sommets appartiennent à (x_3, x_4) et qui induit sur cette chaîne l'intervalle (x_4).

En termes de monômes booléens, ceci implique les trois conditions suivantes :

1) x_4 divise $x_3\ x_4$

2) Puisque $\{m \,/\, m\ x_4 \in \mu f\} = \{x_1\ x_3\}$, $x_1\ x_3\ x_5\ x_6$ appartient à μF.

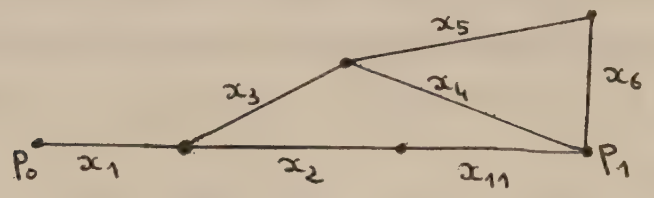
3) $x_5\ x_6$ est premier avec $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_{11}$.

$V\ [(x_3, x_4)]$ étant vide, nous pouvons donc construire sur (x_3, x_4) l'anse (x_5, x_6) et poser:

$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_{11})\ ,\ (x_3, x_4)\ ,\ (x_5, x_6)\}$; $V\ [(x_1, x_2, x_{11})] = \{(x_2, x_{11})\}$

$V\ [(x_3, x_4)] = \{x_4\}$; $V\ [(x_5, x_6)] = \emptyset$; $H = H \quad \{(x_5, x_6)\}$;

$\mu H = \{x_1\ x_2\ x_{11},\ x_1\ x_3\ x_4,\ x_1\ x_3\ x_5\ x_6\}$.



La fonction booléenne associée à H est

$f_H = f + x_1\ x_3\ x_5\ x_6 = x_1\ x_2\ x_{11} + x_1\ x_3\ x_4 + x_1\ x_3\ x_5\ x_6$.

- (x_7, x_8) est une chaîne élémentaire de G - H dont les sommets appartiennent à (x_1, x_2, x_{11}) et qui induit sur cette chaîne l'intervalle (x_2).

En termes de monômes booléens, ceci implique les trois conditions suivantes

1) x_2 divise $x_1\ x_2\ x_{11}$

2) Puisque $\{m \,/\, m\ x_2 \in \mu f\} = \{x_1\ x_{11}\}$, $x_1\ x_7\ x_8\ x_{11}$ appartient à μF.

3) $x_7\ x_8$ est premier avec $x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_{11}$.

(x_2, x_{11}), unique élément de $V\ [(x_1, x_2, x_{11})]$, doit vérifier l'une des trois conditions suivantes :

(i) $(x_2) \subset (x_2, x_{11})$

(ii) $(x_2, x_{11}) \subset (x_2)$

(iii) $E\ [(x_2, x_{11})] \cap E\ [(x_2)] = \emptyset$

Remarquons qu'en termes de monômes booléens, ces trois conditions s'expriment sous la forme suivante

(i) x_2 divise $x_2\, x_{11}$

(ii) $x_2\, x_{11}$ divise x_2

(iii) x_2 et $x_2\, x_{11}$ sont premiers entre eux.

(x_2, x_{11}) vérifiant la condition (i), nous pouvons construire sur (x_1, x_2, x_{11}) l'anse (x_7, x_8) et poser

$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_{11}) , (x_3, x_4) , (x_5, x_6) , (x_7, x_8)\}$;

$V\left[(x_1, x_2, x_{11})\right] = \{(x_2, x_{11}) , (x_2)\}$; $V\left[(x_3, x_4)\right] = (x_4)$;

$V\left[(x_5, x_6)\right] = \emptyset$; $H = H \cup \{(x_7, x_8)\}$;

$\mu H = \{x_1\, x_2\, x_{11} , x_1\, x_3\, x_4 , x_1\, x_3\, x_5\, x_6 , x_1\, x_7\, x_8\, x_{11}\}$.

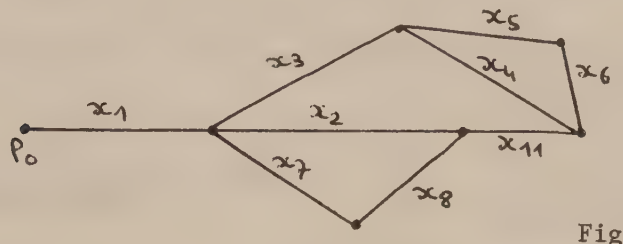


Fig. 4

La fonction booléenne associée à H est

$f = x_1\, x_2\, x_{11} + x_1\, x_3\, x_4 + x_1\, x_3\, x_5\, x_6 + x_1\, x_7\, x_8\, x_{11}$.

Nous ne pouvons poursuivre la construction et nous posons $G' = H$ et $F' = x_1\, x_2\, x_{11} + x_1\, x_3\, x_4 + x_1\, x_3\, x_5\, x_6 + x_1\, x_7\, x_8\, x_{11}$.

Nous constatons bien sur cet exemple que F' est une fonction partielle privilégiée de F.

Ceci nous suggère l'idée de calquer sur cet algorithme de graphes un algorithme nous permettant de construire une fonction partielle privilégiée maximale d'une fonction booléenne quelconque.

Nous énoncerons ce nouvel algorithme (auquel nous affectons le numéro III), en inscrivant en regard les notions et opérations de l'algorithme II qui en ont suggéré l'établissement.

Considérons à cet effet, une fonction booléenne $F(x_1, \ldots, x_m)$ et un graphe G possédant m arêtes : $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et au moins deux sommets P_o et P_1.

Nous savons que l'application de l'algorithme II à G consiste en la construction d'un sous-graphe partiel G' SP (P_o, P_1) maximal de G ; la transcription de cet algorithme en termes de fonctions booléennes nous fournit l'algorithme III,

qui, appliqué à F, nous permet d'en construire une fonction partielle F'.

Le but du paragraphe C sera de montrer que F' est une fonction partielle privilégiée maximale de F.

Notations -

- Pour rendre plus évident le parallélisme qui existe entre l'algorithme II et l'algorithme III, nous convenons de désigner toute chaîne élémentaire de G par un mot dont chaque lettre représente une arête de cette chaîne ; de manière plus précise, si une chaîne élémentaire γ de G vérifie $E(\gamma) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_k}\}$, nous écrirons simplement $\gamma = x_{i_1}\ x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

- Etant donné un monôme m, nous désignerons par D (m) l'ensemble des monômes distincts de 1 qui divisent m.

ALGORITHME III		ALGORITHME II
	Notations	
Ensemble des variables figurant dans F	⟷	**Ensemble des arêtes de G.**
μF	⟷	Ensemble des chaînes élémentaires de G allant de P_o à P_1.
- Considérons, si F est différent de O, un élément m de μF et posons:		Phase (1) - Considérons, s'il en existe, une chaîne élémentaire γ_o^1 allant de P_o à P_1 et posons :
$i = o$		
$g_o = m$	⟷	H est le graphe formé par la chaîne γ_o^1.
$\mu_o = \mu g_o = m$	⟷	Ensemble des chaînes élémentaires de H allant de P_o à P_1.
$\pi_o = \pi g_o = m$	⟷	Les arêtes de H correspondent aux variables de π_o.
$U_o = m$	⟷	$\Gamma = \Gamma^o = \{\gamma_o^1\}$.
$V_o(m) = \emptyset$	⟷	$V(\gamma_o^1) = \emptyset$

U'_o désigne l'ensemble des éléments u de U_o tels que pour tout diviseur d(u) de u il existe un élément v de V(u) qui ne satisfasse aucune des trois conditions

(i) d(u) divise v

(ii) v divise d(u)

(iii) v et d(u) sont premiers entre eux.

Ensemble des anses γ de Γ dont tout intervalle est incompatible avec l'un au moins des intervalles induits sur γ par les éléments de Γ construits sur cette anse. Cela signifie que pour tout intervalle $[a, b]_\gamma$ de γ, il existe un élément v de V (γ) qui ne satisfasse aucune des trois conditions

(i) $[a, b]_\gamma \subset v$

(ii) $v \subset [a, b]_\gamma$

(iii) $E(v) \cap E([a,b]_\gamma) = \emptyset$

Puisque V_o (m) = $\emptyset$, nous posons

$U'_o = \emptyset$

Pour tout élément u de U_o, nous définissons l'ensemble D'(u).

En termes de graphes, cela revient, pour tout élément γ, à définir D'(γ), ensemble des intervalles $[a, b]_\gamma$ de γ, compatibles avec les éléments de V (γ) et tels que a et b ne soient pas extrémités d'une chaîne élémentaire de G - H. Cela signifie qu'il est impossible de construire sur γ une anse qui y induise l'intervalle $[a, b]_\gamma$.

A ce stade de l'algorithme nous posons D'(m) = $\emptyset$

D' (γ_o^1) = $\emptyset$

- Si F = O, F' = O

- S'il n'existe pas de telle chaîne, G' = $\emptyset$

Phase (2)

Supposons que nous ayons construit

Supposons que nous ayons construit

1) la fonction partielle g_i

$\mu_i = \mu g_i$

1) Le sous-graphe partiel H

Ensemble des chaînes élémentaires de H allant de P_o à P_1

$\pi_i = \pi g_i$

Les arêtes de H correspondent aux variables de π_i.

2) U_i	Γ
3) Pour tout élément u de U_i, l'ensemble V_i (u).	Pour tout élément γ de Γ, l'ensemble V (γ).
4) U'_i, ensemble des éléments u de U_i tels que, pour tout diviseur d(u), considéré à ce stade de l'algorithme, il existe un élément v de V_i(u) qui ne satisfasse aucune des trois conditions (i) d(u) divise v (ii) v divise d(u) (iii) v et d(u) sont premiers entre eux.	Ensemble des éléments γ de Γ tels que, pour tout intervalle $[a, b]_\gamma$ de γ, considéré à ce stade de l'algorithme, il existe un élément v de V (γ) qui ne satisfasse aucune des trois conditions (i) $[a, b]_\gamma \subset v$ (ii) $v \subset [a, b]_\gamma$ (iii) $E(v) \cap E([a, b]_\gamma) = \emptyset$
5) Pour tout éléments u de U_i, l'ensemble D' (u).	Pour tout élément γ de Γ, l'ensemble D' (γ).

Première Partie

- Si $\pi_i = \pi F$, $F' = g_i$	Si H = G, G' = H
- Dans le cas contraire, si $U_i - U'_i$ n'est pas vide considérons un élément u de cet ensemble.	Dans le cas contraire s'il existe une anse γ de Γ et un intervalle $[a, b]_\gamma$ qui, pour tout v de V (γ), vérifient l'une des trois conditions (i) $[a, b]_\gamma \subset v$ (ii) $v \subset [a, b]_\gamma$ (iii) $E(v) \cap E([a, b]_\gamma) = \emptyset$ passons à la seconde partie.
. S'il existe un élément α de D (u_i) - D' (u_i) qui, pour tout v de V_i (u_i), vérifie l'une des trois conditions (i) α divise v (ii) v divise α (iii) α et v sont premiers entre eux passons à la seconde partie.	
. Sinon, cela signifie que u_i doit appartenir à U'_i,	Sinon, passons à la phase (4).

nous posons donc

$$U'_i = U'_i \cup \{u_i\}$$

Si $U_i - U'_i$ est vide, g_i est une fonction partielle maximale de F et nous posons $F' = g_i$

Deuxième Partie

Posons $N(\alpha) = \{n / n\alpha \in \mu_i\}$ ⟷ Ensemble des sous-graphes partiels de H dont la réunion avec $[a, b]_\gamma$ forme une chaîne élémentaire de H d'extrémités P_o et P_1

- S'il existe un monôme u_{i+1} tel que ⟷ - S'il existe une chaîne γ' telle que

1) u_{i+1} divise π F ⟷ 1) G contienne γ'

2) $\forall\, n \in N(\alpha)$, $n\, u_{i+1} \in \mu F$ ⟷ 2) les extrémités de γ' appartiennent à H

3) u_{i+1} et π_i sont premiers entre eux. ⟷ 3) $E(\gamma') \cap E(H) = \emptyset$

passons à la phase (3) ⟷ passons à la phase (3).

- Sinon, posons $D'(u) = D'(u) \cup \{\alpha\}$ et retournons à la première partie. ⟷ - Sinon retournons à la première partie.

Phase (3)

Posons

$$g_{i+1} = g_i + \sum_{n \in N(\alpha)} n\alpha$$

$$\mu_{i+1} = \mu_i \cup \Big(\bigcup_{n \in N(\alpha)} \{n\alpha\} \Big)$$

$$\pi_{i+1} = \pi_i \cdot u_{i+1}$$

$$U_{i+1} = U_i \cup \{u_{i+1}\}$$

Construisons sur Υ l'anse Υ' et posons ⟷ $H = H \cup \{\gamma'\}$

⟷ L'ensemble des arêtes de H s'accroît des éléments $E(\gamma')$

⟷ $\Gamma = \Gamma \cup \{\gamma'\}$

$\forall u' \in U_i$, $u' \neq u$, $V_{i+1}(u') = V_i(u')$ ⟷ L'ensemble des intervalles induits sur une anse distincte de γ n'est pas modifié.

$V_{i+1}(u) = V_i(u) \cup \{\alpha\}$ ⟷ $V(\gamma) = V(\gamma) \cup \{[a, b]_\gamma\}$

L'ensemble $V(\gamma)$ s'accroît de l'élément $[a, b]_\gamma$

$V_{i+1}(u_{i+1}) = \emptyset$ ⟷ $V(\gamma') = \emptyset$ (en effet, aucune anse n'a encore été construite sur γ').

$U'_{i+1} = U'_i$

$D'(u_{i+1}) = \emptyset$ ⟷ $D'(\gamma'^1_o) = \emptyset$

Phase (4)

H est un sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G et nous posons G' = H

C) Enoncé et validité de l'algorithme III -

Dans le paragraphe B), la théorie des graphes nous a fourni un support intuitif à l'établissement d'un algorithme de fonctions booléennes. Il nous reste, maintenant, à donner un énoncé plus formalisé de l'algorithme III et à montrer qu'il nous permet d'atteindre le but de ce chapitre.

Il nous faut donc montrer que la fonction F', obtenue par application de cet algorithme à une fonction booléenne F, est une fonction privilégiée maximale de F.

1) Enoncé de l'algorithme III -

L'algorithme III est un algorithme de construction par étapes successives. Il se compose de quatre phases dont chacune repose sur un test.

ALGORITHME III -

Soit F une fonction booléenne donnée sous forme développée.

Première phase -

- Si $F \neq 0$, considérons un élément m de μF et posons

$i = o$; $g_o = m$; $\mu_o = m$; $\pi_o = m$; $U_o = \{m\}$; $V_o(m) = \emptyset$; $U'_o = \emptyset$ $D'(m) = \emptyset$

Passons à la deuxième phase.

- Si $F = 0$, posons $F' = 0$

Deuxième phase -

- Si $\pi F - \pi_i$ et $U_i - U'_i$ sont non vides, considérons un élément u de $U_i - U_i$ et passons à la troisième phase.

- Si l'un des deux ensembles $\pi F - \pi_i$ et $U_i - U'_i$ est vide, posons $F' = g_i$.

Troisième phase -

Soit $A(u_i)$ l'ensemble des éléments α de $D(u_i) - D'(u_i)$ qui, pour tout élément v de $V_i(u_i)$, vérifient l'une des trois conditions

(i) α divise v

(ii) v divise α

(iii) v et α sont premiers entre eux.

- si $A(u_i) \neq \emptyset$, considérons un élément α de $A(u_i)$ et passons à la quatrième phase.

- Si $A(u_i) = \emptyset$, posons $U'_i = U'_i \cup \{u_i\}$ et retournons à la deuxième phase.

Quatrième phase -

Posons $N(\alpha) = \{n \ / \ n\alpha \in \mu_i\}$

Soit $M(\alpha)$ l'ensemble des monômes m qui vérifient les trois propriétés suivantes

1) m divise πF

2) $\forall n \in N(\alpha)$, $n\,m \in \mu F$

3) m et π_i sont premiers entre eux.

- Si $M(\alpha) \neq \emptyset$, considérons un élément u_{i+1} de $M(\alpha)$ et posons

$g_{i+1} = g_i + \sum_{n \in N(\alpha)} n\alpha$; $\mu_{i+1} = \mu_i \cup (\bigcup_{n \in N(\alpha)} \{n\alpha\})$; $\pi_{i+1} = \pi_i \cdot u_{i+1}$;

$U_{i+1} = U_i \cup \{u_{i+1}\}$; $\forall_{u'} \in U_i$, $u' \neq u$, $V_{i+1}(u') = V_i(u')$;

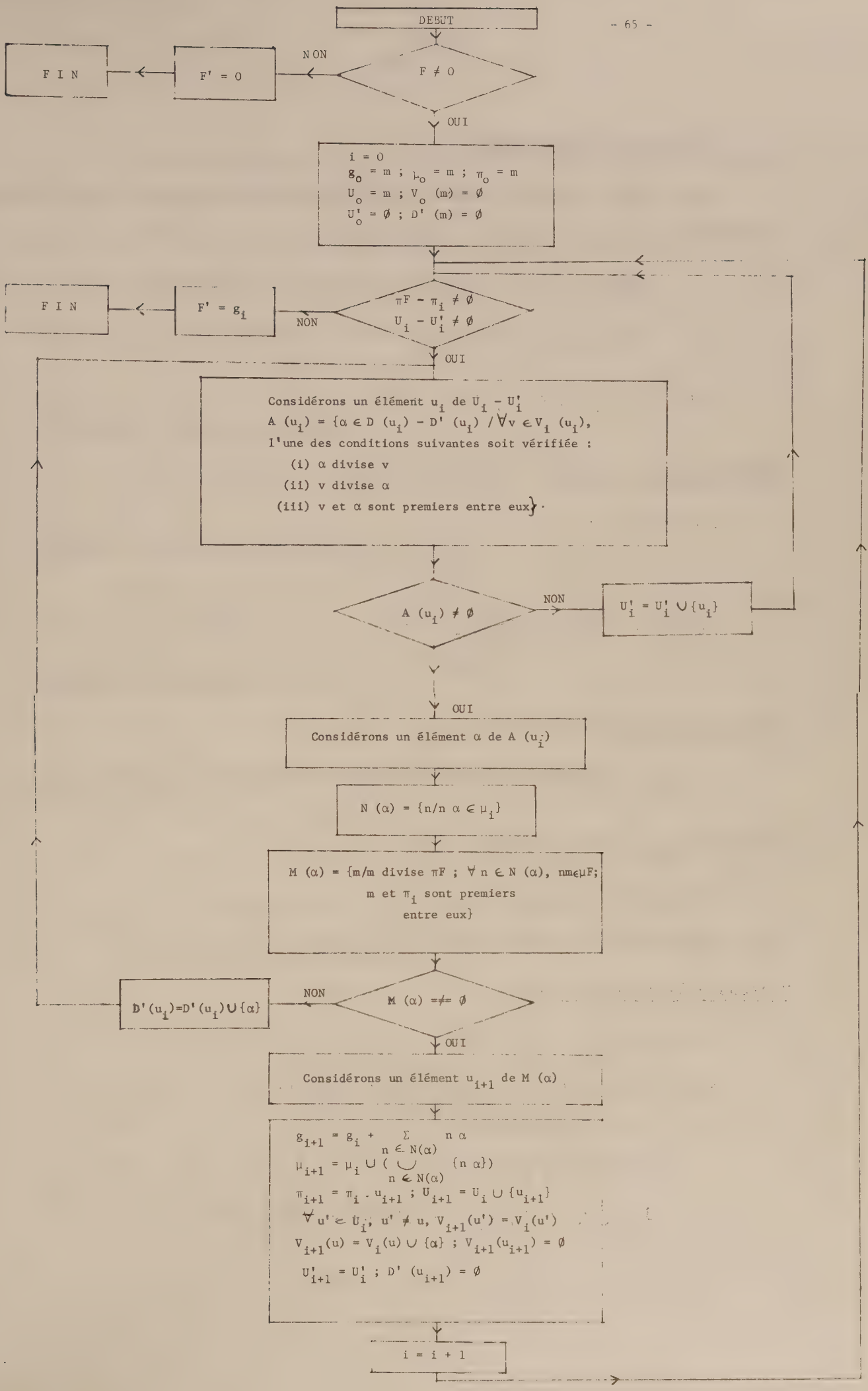
$V_{i+1}(u) = V_i(u) \cup \{\alpha\}$; $V_{i+1}(u_{i+1}) = \emptyset$; $U'_{i+1} = U'_i$;

$D'(u_{i+1}) = \emptyset$; $i = i + 1$.

Retournons à la deuxième phase.

- Si $M(\alpha) = \emptyset$, posons $D'(u_i) = D'(u_i) \cup \{\alpha\}$ et retournons à la troisième phase.

Nous pouvons également représenter cet algorithme par l'organigramme suivant. Chaque test y est représenté par un losange d'où partent deux flèches qui indiquent quelles sont les opérations à effectuer selon que la réponse au test est "oui" ou "non".


DEBUT
F ≠ 0
NON
F' = 0
F I N
OUI
i = 0
$g_o = m$; $\mu_o = m$; $\pi_o = m$
$U_o = m$; $V_o(m) = \emptyset$
$U'_o = \emptyset$; $D'(m) = \emptyset$
$\pi F - \pi_i \neq \emptyset$
$U_i - U'_i \neq \emptyset$
NON
F' = g_i
F I N
OUI
Considérons un élément u_i de $U_i - U'_i$
$A(u_i) = \{\alpha \in D(u_i) - D'(u_i) / \forall v \in V_i(u_i)$,
l'une des conditions suivantes soit vérifiée :
(i) α divise v
(ii) v divise α
(iii) v et α sont premiers entre eux$\}$.
$A(u_i) \neq \emptyset$
NON
$U'_i = U'_i \cup \{u_i\}$
OUI
Considérons un élément α de $A(u_i)$
$N(\alpha) = \{n / n\,\alpha \in \mu_i\}$
$M(\alpha) = \{m / m$ divise πF ; $\forall n \in N(\alpha)$, $nm \in \mu F$;
m et π_i sont premiers
entre eux$\}$
$M(\alpha) =\neq= \emptyset$
NON
$D'(u_i) = D'(u_i) \cup \{\alpha\}$
OUI
Considérons un élément u_{i+1} de $M(\alpha)$
$g_{i+1} = g_i + \sum_{n \in N(\alpha)} n\,\alpha$
$\mu_{i+1} = \mu_i \cup (\bigcup_{n \in N(\alpha)} \{n\,\alpha\})$
$\pi_{i+1} = \pi_i \cdot u_{i+1}$; $U_{i+1} = U_i \cup \{u_{i+1}\}$
$\forall u' \in U_i$, $u' \neq u$, $V_{i+1}(u') = V_i(u')$
$V_{i+1}(u) = V_i(u) \cup \{\alpha\}$; $V_{i+1}(u_{i+1}) = \emptyset$
$U'_{i+1} = U'_i$; $D'(u_{i+1}) = \emptyset$
i = i + 1

2) Exemple d'application -

Nous allons construire une fonction partielle maximale F' de la fonction booléenne $F = x_1 x_2 + x_1 x_6 x_9 + x_1 x_4 x_{10} + x_3 x_6 + x_2 x_3 x_9 +$

$x_3 x_4 x_9 x_{10} + x_5 x_6 + x_2 x_5 x_9 + x_4 x_5 x_9 x_{10} +$

$x_6 x_7 x_8 + x_2 x_7 x_8 x_9 + x_4 x_7 x_8 x_9 x_{10}$.

$\pi F = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}$

Première phase -

Posons i = 0

$g_o = x_1 x_2$; $\mu_o = x_1 x_2$; $\pi_o = x_1 x_2$

$U_o = \{x_1 x_2\}$; $V_o (x_1 x_2) = \emptyset$

$U'_o = \emptyset$; $D' (x_1 x_2) = \emptyset$

Passons à la seconde phase -

π_o étant différent de πF, considérons l'élément $x_1 x_2$ de $U_o - U'_o$

Passons à la troisième phase -

$A (x_1 x_2) = \{x_1, x_2, \overline{x_1}, \overline{x_2}\}$

Considérons l'élément x_1 de $A (x_1 x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$N (x_1) = \{x_2\}$

$x_5 x_9$ vérifie les trois propriétés suivantes

1) $x_5 x_9$ divise πF

2) $x_2 x_5 x_9 \in \mu F$

3) $x_5 x_9$ et $x_1 x_2$ sont premiers entre eux.

Nous en déduisons que $x_5\ x_9$ appartient à M (x_1) et nous posons

$$u_1 = x_5\ x_9$$

$g_1 = x_1\ x_2 + x_2\ x_5\ x_9$; $\mu_1 = x_1\ x_2 + x_2\ x_5\ x_9$; $\pi_1 = x_1\ x_2\ x_5\ x_9$

$U_1 = \{x_1\ x_2,\ x_5\ x_9\}$; $V_1\ (x_1\ x_2) = \{x_1\}$; $V_1\ (x_5\ x_9) = \emptyset$

$U_1' = \emptyset$; $D'\ (x_5\ x_9) = \emptyset$

$$i = 1$$

Retournons à la seconde phase -

π_1 étant différent de πF, considérons l'élément $x_1\ x_2$ de $U_1 - U_1'$.

Passons à la troisième phase -

Puisque x_2 appartient à $D\ (x_1\ x_2) - D'\ (x_1\ x_2)$ et qu'il est premier avec x_1 (unique élément de $V_1\ (x_1\ x_2)$), x_2 appartient à $A\ (x_1\ x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$$N\ (x_2) = \{x_1,\ x_5\ x_9\}$$

$x_4\ x_{10}$ vérifie les trois propriétés suivantes

1) $x_4\ x_{10}$ divise πF

2) $x_1\ x_4\ x_{10}$ et $x_4\ x_5\ x_9\ x_{10}$ appartiennent à μF

3) $x_4\ x_{10}$ et $x_1\ x_2\ x_9\ x_5$ sont premiers entre eux.

Nous en déduisons que $x_4\ x_{10}$ appartient à M (x_2) et nous posons

$$u_2 = x_4\ x_{10}$$

$g_2 = x_1\ x_2 + x_2\ x_5\ x_9 + x_1\ x_4\ x_{10} + x_4\ x_5\ x_9\ x_{10}$

$\mu_2 = \{x_1\ x_2,\ x_2\ x_5\ x_9,\ x_1\ x_4\ x_{10},\ x_4\ x_5\ x_9\ x_{10}\}$;

$\pi_2 = x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_9\ x_{10}$; $U_2 = \{x_1\ x_2,\ x_5\ x_9,\ x_4\ x_{10}\}$;

$V_2\ (x_5\ x_9) = \emptyset$; $V_2\ (x_1\ x_2) = \{x_1,\ x_2\}$; $V_2\ (x_4\ x_{10}) = \emptyset$;

$U_2' = \emptyset$; $D'\ (x_4\ x_{10}) = \emptyset$

$$i = 2$$

Retournons à la seconde phase -

π_2 étant différent de πF, considérons l'élément $x_1\ x_2$ de $U_2 - U_2'$.

Passons à la troisième phase -

Puisque x_2 appartient à $D(x_1\ x_2) - D'(x_1\ x_2)$ et qu'il est premier avec l'élément x_1 de $V_2(x_1\ x_2)$, x_2 appartient à $A(x_1\ x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$N(x_2) = \{x_1, x_5\ x_9\}$

Les seuls monômes m qui vérifient les deux propriétés

1) m divise πF

2) $x_1 m$ et $x_5\ x_9\ m$ appartiennent à μF

sont x_2 et $x_4\ x_{10}$.

Aucun de ces deux monômes n'étant premier avec π_2, $M(x_2) = \emptyset$, nous posons alors $D'(x_1\ x_2) = \{x_2\}$

Passons à la troisième phase -

Puisque x_1 appartient à $D(x_1\ x_2) - D'(x_1\ x_2) = \{x_1, x_1\ x_2\}$ et qu'il est premier avec l'élément x_2 de $V_2(x_1\ x_2)$, x_1 appartient à $A(x_1\ x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$$N(x_1) = \{x_2, x_4\ x_{10}\}$$

Les seuls monômes m qui vérifient les deux propriétés

1) m divise πF

2) $x_2\ m$ et $x_4\ x_{10}\ m$ appartiennent à μF

sont x_1, $x_5\ x_9$, $x_7\ x_8\ x_9$ et $x_3\ x_9$. Aucun de ces monômes n'étant premier avec π_2, $M(x_1) = \emptyset$.

Nous posons alors $D'(x_1\ x_2) = \{x_1, x_2\}$

Passons à la troisième phase -

Puisque $x_1\ x_2$ appartient à $D(x_1\ x_2) - D'(x_1\ x_2) = \{x_1\ x_2\}$ et qu'il est

divisible pas les deux éléments x_1 et x_2 de $V_2(x_1\ x_2)$, $x_1\ x_2$ appartient à $A(x_1\ x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$$N(x_1\ x_2) = \{1\}$$

$x_6\ x_7\ x_8$ vérifie les trois propriétés suivantes

1) $x_6\ x_7\ x_8$ divise πF

2) $x_6\ x_7\ x_8 \cdot 1 = x_6\ x_7\ x_8 \in \mu F$

3) $x_6\ x_7\ x_8$ est premier avec π_2

Nous en déduisons que $x_6\ x_7\ x_8$ appartient à $M(x_1\ x_2)$ et nous posons

$$u_3 = x_6\ x_7\ x_8$$

$g_3 = x_1\ x_2 + x_2\ x_5\ x_9 + x_1\ x_4\ x_{10} + x_4\ x_5\ x_9\ x_{10} + x_6\ x_7\ x_8$

$\mu_3 = \{x_1\ x_2,\ x_2\ x_5\ x_9,\ x_1\ x_4\ x_{10},\ x_4\ x_5\ x_9\ x_{10},\ x_6\ x_7\ x_8\}$

$\pi_3 = x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}$

$U_3 = \{x_1\ x_2,\ x_5\ x_9,\ x_4\ x_{10},\ x_6\ x_7\ x_8\}$; $V_3(x_5\ x_9) = \emptyset$; $V_3(x_4\ x_{10}) = \emptyset$;

$V_3(x_1\ x_2) = \{x_1,\ x_2,\ x_1\ x_2\}$; $V_3(x_6\ x_7\ x_8) = \emptyset$;

$U_3' = \emptyset$; $D'(x_6\ x_7\ x_8) = \emptyset$.

$$i = 3$$

Retournons à la seconde phase -

π_3 étant différent de πF, considérons l'élément $x_1\ x_2$ de $U_3 - U_3'$.

Passons à la troisième phase -

Puisque $x_1\ x_2$ appartient à $D(x_1\ x_2) - D'(x_1\ x_2) = \{x_1\ x_2\}$ et qu'il est divisible par les éléments x_1 et x_2 de $V_3(x_1\ x_2)$, $x_1\ x_2$ appartient à $A(x_1\ x_2)$.

Passons à la quatrième phase -

$$N(x_1\ x_2) = \{1\}$$

L'ensemble des monômes m qui vérifient les deux propriétés

1) m divise πF

2) m.1 = m appartient à μF

est égal à μF.

Comme aucun monôme de μF n'est premier avec π_3, $M(x_1\ x_2) = \emptyset$.

Nous posons alors $D'(x_1\ x_2) = \{x_1, x_2, x_1\ x_2\}$

Passons à la seconde phase -

π_3 étant différent de πF, considérons l'élément $x_1\ x_2$ de $U_3 - U_3'$.

Passons à la troisième phase -

Puisque $D(x_1\ x_2) - D'(x_1\ x_2)$ est vide, il en est de même de $A(x_1\ x_2)$.

Posons alors $U_3' = \{x_1\ x_2\}$.

Retournons à la seconde phase -

Puisque π_3 est différent de π_F et que $U_3 - U_3' = \{x_5\ x_9, x_4\ x_{10}, x_6\ x_7\ x_8\}$ considérons $x_5\ x_9$.

Passons à la troisième phase -

Puisque $D'(x_5\ x_9)$ est vide, x_5 appartient à $D(x_5\ x_9) - D'(x_5\ x_9)$.

Comme, de plus, $V_3(x_5\ x_9)$ est vide, x_5 appartient à $A(x_5\ x_9)$.

Passons à la quatrième phase -

$$N(x_5) = \{x_2\ x_9, x_4\ x_9\ x_{10}\}$$

x_3 vérifie les trois propriétés suivantes

1) x_3 divise πF

2) $x_3\ x_9\ x_2$ et $x_3\ x_9\ x_4\ x_{10}$ appartiennent à μF

3) x_3 est premier avec π_3.

Nous en déduisons que x_3 appartient à $M(x_5)$ et nous posons

$$u_4 = x_3$$

$g_4 = x_1\,x_2 + x_2\,x_5\,x_9 + x_1\,x_4\,x_{10} + x_4\,x_5\,x_9\,x_{10} + x_6\,x_7\,x_8 + x_3\,x_2\,x_9 + x_3\,x_4\,x_9\,x_{10}$

$\mu_4 = \{x_1\,x_2,\ x_2\,x_5\,x_9,\ x_1\,x_4\,x_{10},\ x_4\,x_5\,x_9\,x_{10},\ x_6\,x_7\,x_8,\ x_3\,x_2\,x_9,\ x_3\,x_4\,x_9\,x_{10}\}$

$\pi_4 = x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6\,x_7\,x_8\,x_9\,x_{10}$

$U_4 = \{x_1\,x_2,\ x_5\,x_9,\ x_4\,x_{10},\ x_6\,x_7\,x_8,\ x_3\}$; $V_4\,(x_1\,x_2) = \{x_1,\ x_2,\ x_1\,x_2\}$

$V_4\,(x_4\,x_{10}) = \emptyset$; $V_4\,(x_6\,x_7\,x_8) = \emptyset$; $V_4\,(x_5\,x_9) = \{x_5\}$; $V_4\,(x_3) = \emptyset$.

$U'_4 = \{x_1\,x_2\}$; $D'\,(x_3) = \emptyset$

$i = 4$

Retournons à la seconde phase -

Puisque $\pi_4 = \pi F$, g_4 est la fonction partielle cherchée. g_4 est la fonction associée au graphe SP (P_o, P_1) de la figure 5.

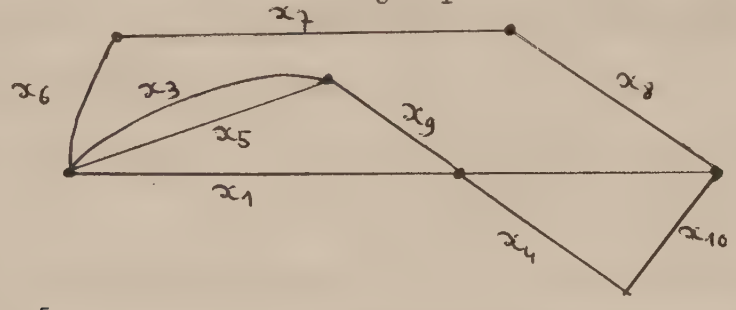


Fig. 5

Dans les paragraphes suivants, nous allons montrer qu'une fonction booléenne F', obtenue par application de l'algorithme III à une fonction booléenne F quelconque, est une fonction partielle privilégiée maximale de F.

Remarque -

F' ne peut être nulle que si F l'est. Dans ce cas F' est bien une fonction partielle privilégiée maximale de F. Dans les paragraphes 3, 4 et 5 nous pouvons donc supposer que F' est non nulle.

3) Notations et remarques -

Remarque 3.1 - Désignons par n la valeur maxima atteinte par l'indice i au

cours de l'application de l'algorithme. f est donc égal à g_n et l'une au moins des deux conditions est vérifiée

. $U_n - U'_n = \emptyset$

. $\pi F' = \pi_n = \pi F$

Notations 3.1 - Soient γ et γ' deux chaînes élémentaires.

$\gamma \mathbin{\S} \gamma'$ désigne une chaîne formée par connexion en série des deux chaînes γ et γ' ; c'est donc une chaîne dont γ et γ' sont deux sous-chaînes, $\gamma \mathbin{\S} \gamma'$ a pour extrémités une extrémité de γ et une extrémité de γ'.

L'opération de connexion en série est associative. Par suite, considérons un ensemble de chaînes γ_i, où i est un indice qui prend ses valeurs dans un ensemble $I = \{1, 2, \ldots, k\}$; $\mathop{\S}_{i \in I} \gamma_i$ désigne la connexion en série de k chaînes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$; cela signifie que $\mathop{\S}_{i \in I} \gamma_i = \mathop{\S}_{i=1}^{k} \gamma_i = \gamma_1 \mathbin{\S} \gamma_2, \ldots \mathbin{\S} \gamma_k$.

4) Graphes associés aux fonctions g_i -

Pour tout indice i, $1 \leq i \leq n$, nous définissons l'ensemble Γ_{u_i} des chaînes élémentaires γ_{u_i} telles que

1) u_i soit la fonction booléenne associée à γ_{u_i}.

2) pour tout élément v de $V_n(u_i)$, le v-graphe partiel (cf. définition page 53) γ_v de γ_{u_i}, soit une sous-chaîne de γ_{u_i}.

Proposition 4.1 -

Pour tout indice i, $1 \leq i \leq n$, Γ_{u_i} est non vide. Pour cela, nous allons exhiber un élément de cet ensemble. La relation de divisibilité des monômes est une relation d'ordre partiel : nous pouvons dire que le monôme m est inférieur au monôme m' si et seulement si m divise m'.

Rappelons que deux monômes v et v' de $V_n(u_i)$ vérifient l'une des trois conditions suivantes :

(i) v divise v'

(ii) v' divise v

(iii) v et v' sont premiers.

Soit $V_n^1(u_i)$ l'ensemble des éléments de $V_n(u_i)$ minimaux pour la relation de divisibilité des monômes.

Soit $V_n^2(u_i)$ l'ensemble des éléments de $V_n(u_i) - V_n^1(u_i)$ minimaux pour la relation de divisibilité des monômes...

Soit $V_n^{j+1}(u_i)$ l'ensemble des éléments de $V_n(u_i) - V_n^1(u_i) - V_n^2(u_i) \ldots V_n^j(u_i)$ minimaux pour la relation de divisibilité des monômes.

$V_n(u_i)$ étant fini, il existe un indice 1 tel que $V_n^{1+1}(u_i) = \emptyset$ et alors $V_n(u_i) = V_n^1(u_i) \; V_n^2(u_i) \; \ldots \; V_n^1(u_i)$.

Remarquons que pour tout i, $0 \leq i \leq 1$, deux éléments v^i et v'^i de $V_n^i(u_i)$ sont premiers entre eux.

Pour tout élément v^1 de $V_n^1(u_i)$ considérons une chaîne γ_{v^1} associée à v^1.

Considérons un élément v^2 de $V_n^2(u_i)$ et l'ensemble $V_n^1(u_i, v^2)$ des éléments de $V_n^1(u_i)$ qui divisent v^2 ; soit v'^2 le monôme dont les variables sont les variables de v^2 qui ne figurent dans aucun élément de $V_n^1(u_i, v_2)$ et soit $\gamma_{v'^2}$ une chaîne élémentaire associée à v'^2 (si $v'^2 = 1$, $\gamma_{v'^2} = \emptyset$). Posons $\gamma_{v^2} = \left(\bigcup_{v^1 \in V_n^1(u_i, v^2)} \gamma_{v^1} \right) \cup \gamma_{v'^2}$; puisque les éléments de $V_n^1(u_i, v^2) \cup \{v'^2\}$ sont premiers entre eux et que $v^2 = \left(\prod_{v^1 \in V_n^1(u_i, v^2)} v^1 \right) v'^2$, γ_{v^2} est une chaîne élémentaire associée à v^2. Nous pouvons donc, pour tout élément de v^2 de $V_n^2(u_i)$ définir ainsi une chaîne γ_{v^2} qui lui soit associée.

Pour un élément v^3 de $V_n^3(u_i)$ nous définissons de la même façon une chaîne γ_{v^3} à partir des chaînes associées aux éléments de $V_n^2(u_i)$.

D'une manière générale, supposons qu'à tout élément v^j de $V_n^j(u_i)$ nous

ayons associé une chaîne élémentaire γ_{v^j} et considérons un élément v^{j+1} de $V_n^{j+1}(u_i)$. Désignons par $V_n^j(u_i, v^{j+1})$ l'ensemble des éléments de V_n^j qui divisent v^{j+1} ; soit v'^{j+1} le monôme dont les variables sont les variables de v^{j+1} ; soit v'^{j+1} le monôme dont les variables sont les variables de v^{j+1} qui ne figurent dans aucun élément de $V_n^j(u_i, v^{j+1})$ et soit $\gamma_{v'^{j+1}}$ une chaîne élémentaire associée à v'^{j+1} (si $v'^{j+1} = 1$, $\gamma_{v'^{j+1}} = \emptyset$).

Posons $\gamma_{v^{j+1}} = \left(\bigcup_{v^j \in V_n^j(u_i, v^{j+1})} \gamma_{v^j} \right) \cup \gamma_{v'^{j+1}}$; puisque les éléments de $V_n^j(u_i, v^{j+1}) \cup \{v'^{j+1}\}$ sont premiers entre eux et que $v^{j+1} = \left(\prod_{v^j \in V_n^j(u_i, v^{j+1})} v^j \right) v'^{j+1}$, $\gamma_{v^{j+1}}$ est une chaîne élémentaire associée à v^{j+1}.

Nous opérons de la même façon pour tous les éléments v^{j+1} de $V_n^{j+1}(u_i)$. Ainsi, à tout élément v de $V_n(u_i)$, nous pouvons associer une chaîne γ_v.

Soit $V'_n(u_i)$ l'ensemble des éléments de $V_n(u_i)$ maximaux pour la relation de divisibilité et $v'(u_i)$ le monôme dont les variables sont les variables de u_i qui ne figurent dans aucun élément de $V'_n(u_i)$.

Puisque les éléments de $V'_n(u_i) \cup \{v'(u_i)\}$ sont premiers entre eux et que leur produit est le monôme u_i, $\gamma_{u_i} = \left(\bigcup_{v' \in V'_n(u_i)} \gamma_{v'} \right) \cup \gamma_{v'(u_i)}$ est une chaîne élémentaire associée à u_i. D'après la construction de γ_{u_i}, pour tout élément v de $V_n(u_i)$, le v-graphe partiel $\gamma_{v u_i}$ de γ_{u_i} est en outre une chaîne de γ_{u_i}. Nous en déduisons que γ_{u_i} appartient à Γ^{u_i} et que Γ^{u_i} est non vide.

Exemple -

$u_i = x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}$

$V_n^1(u_i) = \{x_2\ x_4,\ x_5,\ x_9,\ x_7\}$

$V_n^2(u_i) = \{x_2\ x_4\ x_6,\ x_1\ x_5,\ x_3\ x_7\}$

Aux éléments $x_2\ x_4$, x_5, x_9, x_7 de $V_n^1(u_i)$, nous associons les chaînes $\gamma_{x_2\ x_4}$, γ_{x_5}, γ_{x_9} et γ_{x_7} représentées à la figure 1.

Fig. 1

Construction de $\gamma_{x_2\ x_4\ x_6}$ -

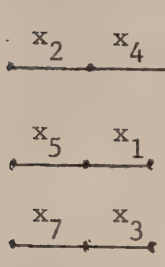


Fig. 2

$V_n^1(u_i, x_2\ x_4\ x_6) = \{x_2\ x_4\}$; $v'^2 = x_6$

d'où $\gamma_{x_2\ x_4\ x_6} = \gamma_{x_2\ x_4} \mathbin{S} \gamma_{x_6}$

Construction de $\gamma_{x_1\ x_5}$ -

$V_n^1(u_i, x_1\ x_5) = \{x_5\}$; $v'^2 = x_1$

d'où $\gamma_{x_1\ x_5} = \gamma_{x_5} \mathbin{S} \gamma_{x_1}$

Construction de $\gamma_{x_3\ x_7}$ -

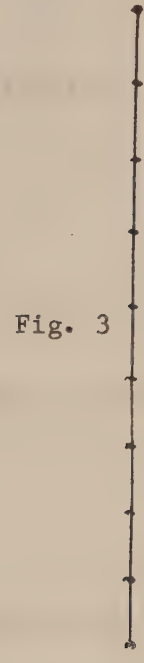


Fig. 3

$V_n^1(u_i, x_3\ x_7) = \{x_7\}$; $v'^2 = x_3$

d'où $\gamma_{x_3\ x_7} = \gamma_{x_7} \mathbin{S} \gamma_{x_3}$

$\gamma_{x_2\ x_4\ x_6}$, $\gamma_{x_1\ x_5}$ et $\gamma_{x_3\ x_7}$ sont représentés à la figure 2.

$V_n^1(u_i) = \{x_2\ x_4\ x_6, x_1\ x_5, x_9, x_3\ x_7\}$, $v'(u_i) = x_{10}\ x_8$

d'où $\gamma_{u_i} = \gamma_{x_2\ x_4\ x_6} \mathbin{S} \gamma_{x_1\ x_5} \mathbin{S} \gamma_{x_9} \mathbin{S} \gamma_{x_3\ x_7} \mathbin{S} \gamma_{x_{10}\ x_8}$

γ_{u_i} est représenté à la figure 3.

Proposition 4.2 -

Pour tout indice i, $0 \leq i \leq n$, il existe un graphe $G_i = \gamma^\circ_{u_o} \cup \gamma^\circ_{u_1} \cup \cdots \cup \gamma^\circ_{u_i}$ tel que

I - g_i soit la fonction booléenne associée à G_i.

II - Pour tout j, $0 \leq j \leq i$, $\overset{\circ}{u}$ appartienne à Γ_{u_j}.

III - Pour tout j, $1 \leq j \leq i$, il existe un indice k ($k < j$) tel que $\gamma^\circ_{u_j}$ ait pour extrémités celles d'une chaîne γ_v de G_i associée à un élément v de $V_n(u_k)$.

Construisons ces graphes en raisonnant par induction sur i.

- Construction de G_o.

Nous pensons pour G_o une chaîne $\gamma^\circ_{u_o}$ de l'ensemble Γu_o.

Nous appelons P_o et P_1 les extrémités de cette chaîne.

Puisque $g_o = u_o$, la fonction associée à G_o est bien g_o.

- Supposons que nous ayons construit un graphe $G_i = \gamma^\circ_{u_o} \cup \ldots \cup \gamma^\circ_{u_i}$ vérifiant les conditions I, II et III.

Considérons alors le monôme u_{i+1}, son existence implique celle d'un indice j et d'un diviseur α de u_j, $\alpha \in V_n(u_j)$, possédant les 2 propriétés suivantes :

. Pour tout élément v de $V_n(u_j)$ l'une des conditions suivantes est remplie

(i) v divise α

(ii) α divise v

(iii) α et v sont premiers.

. Si $N(\alpha)$ est l'ensemble $\{n / n\ \alpha \quad M_j\}$, les trois conditions suivantes sont remplies.

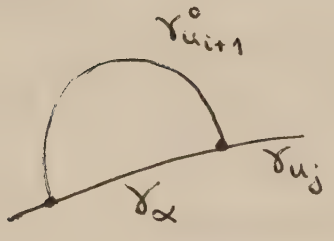
1) u_{i+1} divise πF

2) $V_n \in N(\alpha)$, $n\ u_{i+1} \in \mu F$

3) u_{i+1} et π_i sont premiers entre eux.

α appartenant à $V_n(u_j)$, l'α-graphe partiel γ_α de G_i est une chaîne.

Considérons alors un graphe $G_{i+1} = G_i \cup \{\gamma^\circ_{u_{i+1}}\}$ tel que



1) $\gamma^\circ_{u_{i+1}}$ soit un élément de $\Gamma_{u_{i+1}}$

2) Les extrémités de $\gamma^\circ_{u_{i+1}}$ soient les extrémités de γ_α

3) Les points intérieurs à $\gamma^\circ_{u_{i+1}}$ soient de degré 2 dans G_{i+1}.

Les conditions 2) et 3) signifient que $\gamma^\circ_{u_{i+1}}$ est une anse de G_{i+1} construite sur γ_{u_j}. Soit h la fonction booléenne associée à G_{i+1}.

Soit C l'ensemble des chaînes élémentaires de G_{i+1} d'extrémités P_o et P_1. Désignons par h la fonction booléenne associée à G_{i+1}. Chaque monôme de μh est associé à une chaîne de C et réciproquement. Soit C_1 le sous-ensemble de C dont les éléments sont contenus dans G_i et soit C_2 le sous-ensemble de C dont chaque élément contient $\gamma^{\circ}_{u_{i+1}}$.

C est alors la réunion disjointe de C_1 et de C_2.

Remarque 4.1 -

Il existe une bijection entre C_2 et l'ensemble des chaînes élémentaires de G_i allant de P_o à P_1 qui contiennent γ_α ; l'image d'une chaîne c_2 de C_2 est la chaîne obtenue en remplaçant dans c_2 la sous-chaîne $\gamma^{\circ}_{u_{i+1}}$ par γ_α.

L'ensemble des monômes de $\mu\, g_i$ associés aux chaînes élémentaires de G_i allant de P_o à P_1 qui contiennent γ_α est $\{n\alpha \;/\; n \in N_{\cdot}(\alpha)\}$. Par suite, en vertu de la remarque 4.1, l'ensemble des monômes de μh associés aux chaînes de C_2 est $\{nu_{i+1} \;/\; n \in N(\alpha)\}$.

L'ensemble des monômes de μh associés aux chaînes élémentaires allant de P_o à P_1 contenues dans G_i est $\mu\, g_i = \mu_i$.

Par suite, l'ensemble μh est égal à $\mu_i \cup \left(\bigcup_{n \in N(\alpha)} n\, u_{i+1}\right)$, c'est-à-dire à μ_{i+1} et $h = g_i + \sum_{n \in N(\alpha)} n\, u_{i+1} = g_{i+1}$.

Nous avons donc construit un graphe $G_{i+1} = G_i \cup \gamma^{\circ}_{u_{i+1}} = \gamma\, u^{\circ}_o \cup \ldots \cup \gamma^{\circ}_{u_{i+1}}$ tel que :

I - g_{i+1} soit la fonction booléenne associée à G_{i+1}

II - Pour tout j, $0 \leq j \leq i+1$, $\gamma^{\circ}_{u_j}$ appartienne à Γ_{u_j}

III - Pour tout j, $1 \leq j \leq i+1$, il existe un indice k ($k < j$) tel que $\gamma^{\circ}_{u_j}$ ait pour extrémités celles d'une chaîne γ_v de G_i associée à un élément v de $V_n(u_k)$.

La proposition 4.2 est ainsi démontrée par induction sur i.

5) Montrons que $F' = g_n$ est privilégiée -

De la proposition 4.2, nous déduisons les remarques suivantes :

Remarque 5.1 - γu_o° est une chaîne élémentaire de G_n allant de P_o à P_1.

Remarque 5.2 - Pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$, il existe un indice $j \leq i$ tel que

a) $\gamma_{u_{i+1}}$ soit une chaîne élémentaire de G_{i+1} dont les sommets intérieurs sont de degré 2 et dont les extrémités sont celles d'un intervalle γ_α de $\gamma^\circ_{u_j}$. Cela signifie donc dans le graphe G_{i+1}, $\gamma_{u_{i+1}}$ est une anse de $\gamma^\circ_{u_j}$ qui induit sur $\gamma^\circ_{u_j}$ un intervalle γ_α.

b) Toute chaîne $\gamma^\circ_{u_k}$ $(j < k \leq i+1)$ dont les extrémités appartiennent à $\gamma^\circ_{u_j}$, induise sur $\gamma^\circ_{u_j}$ un intervalle γ_v associé à un élément v de $V_n(u_j)$. Deux éléments de $V_n(u_j)$ étant nécessairement, soit premiers entre eux, soit diviseurs l'un de l'autre, tout $\gamma^\circ_{u_k}$, $j < k \leq i$, dont les extrémités appartiennent à $\gamma^\circ_{u_j}$, induit sur $\gamma^\circ_{u_j}$ un intervalle γ_v vérifiant l'une des conditions suivantes :

$$\text{(i)} \quad \gamma_v \subset \gamma_\alpha$$

$$\text{(ii)} \quad \gamma_\alpha \subset \gamma_v$$

$$\text{(iii)} \quad E(\gamma_\alpha) \cap E(\gamma_v) = \emptyset$$

Cela signifie que $\gamma^\circ_{u_{i+1}}$ est une anse de G_{i+1} compatible avec les chaînes de $\gamma^\circ_{u_k}$, $j < k \leq i$ dont les deux extrémités appartiennent à $\gamma^\circ_{u_j}$.

Appliquons à G_n l'algorithme II du chapitre II. Rappelons que cet algorithme consiste en une construction par étapes successives ; à chaque étape nous obtenons un sous-graphe partiel H SP (P_o, P_1) de G_n en construisant une chaîne de G_n dont la réunion avec le graphe obtenu à l'étape précédente forme H.

Les remarques 5.1) et 5.2) permettent de dire que nous pouvons appliquer cet algorithme à G_n en opérant de la façon suivante.

. Commençons par construire $\gamma^\circ_{u_o}$, chaîne élémentaire de G_n allant de P_o à P_1. Nous construisons ainsi le sous-graphe partiel G_o de G_n.

. Construisant ensuite la chaîne $\gamma^\circ_{u_1}$ de G_n, nous obtenons le sous-graphe partiel G_1 de G_n ; puis construisant $\gamma^\circ_{u_2}$, nous obtenons G_2 et ainsi de suite.

D'une manière générale, G_j étant construit, nous construisons $\gamma^{\circ}_{u_{j+1}}$ et obtenons ainsi le graphe G_{j+1}.

. Nous réitérons le procédé jusqu'à obtention du graphe G_n.

Ainsi, par application de l'algorithme à G_n, nous obtenons comme sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G_n, le graphe G_n lui-même.

Nous en déduisons que G_n est SP (P_o, P_1) et $F' = g_n$ est privilégiée.

6) Montrons que $F' = g_n$ est maximale -

Démontrons ce résultat par l'absurde.

Supposons qu'il existe une fonction partielle privilégiée F" de F vérifiant $\mu_n = \mu g_n \subsetneq \mu F'' \subset \mu F$.

Etant une fonction booléenne privilégiée, F" est associée à un graphe G" SP par rapport à deux de ses sommets ; nous pouvons désigner par P_o et P_1 ces deux sommets.

$G' = G_n$ (graphe associé à $F' = g_n$) étant SP (P_o, P_1), $\mu g_n \subsetneq \mu F''$. implique $G' \subsetneq G''$.

Appliquons à G" l'algorithme II du chapitre II.

Puisque G" contient G', nous pouvons commencer l'application de cet algorithme en opérant de la même façon qu'au paragraphe 5).

Construisons ainsi, successivement, les anses $\gamma^{\circ}_{u_o}, \gamma^{\circ}_{u_1}, \ldots, \gamma^{\circ}_{u_n}$. A ce stade de l'algorithme nous obtenons donc le sous-graphe partiel $G' = G_n = \gamma^{\circ}_{u_o} \cup \ldots \cup \gamma^{\circ}_{u_n}$ de G". Puisque G" est SP (P_o, P_1), $G' = G_n$ n'est pas un sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal de G" et il est donc possible de continuer l'application de l'algorithme.

Cela signifie qu'il existe un indice j, $0 \leq j \leq n$ et une chaîne élémentaire γ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\gamma \subset G'$
2. γ est disjointe de G_n (sauf en ses extrémités).
3. Les extrémités de γ appartiennent à γ_{u_j}.
4. Pour tout élément γ_v de $\{\gamma_v / v \in V_n(u_j)\}$, l'inter-

valle $[u, v]\ \gamma_{u_j}$ vérifie l'une des trois conditions suivantes

(i) $[u, v]\ \gamma_{u_j} \subset \gamma_v$

(ii) $\gamma_v \subset [u, v]\ \gamma_{u_j}$

(iii) $E(\gamma_v) \cap E([u, v]\ \gamma_{u_j}) = \emptyset$

Désignant alors par u (resp.γ) le monôme associé à la chaîne γ (resp. $[u, v]\ \gamma_{u_j}$), ceci implique qu'il existe un monôme $u_j \in U_n = \{u_o, \ldots u_n\}$ et un monôme u vérifiant

1' . u divise $\pi F'$, et donc πF

2' . Pour tout n de N (α), u.n appartient à M_n

3' . u et π_n sont premiers.

4' . Pour tout élément v de $V_n(u_j)$, α vérifie l'une des trois conditions suivantes :

(i) α divise v

(ii) v divise α

(iii) v et α sont premiers entre eux.

Ceci nous permet d'affirmer que u_j n'appartient pas à U'_n . u_j appartient donc à $U_n - U'_n$, ce qui implique $U_n - U'_n \neq \emptyset$.

De plus, $G' \subsetneq G''$ implique qu'il existe une arête x de G'' qui n'appartient pas à G' ; par suite, la variable x associée à cette arête figure dans F'' et ne figure pas dans F' ; d'où $\pi F'' \neq \pi F'$.

Comme $\mu F \subsetneq \mu F'' \subset \mu F$ implique que $\pi F'$ divise $\pi F''$ et que $\pi F''$ divise πF ; nous en déduisons que $\pi_{F'}$ est différent de π_F.

Ces résultats sont en contradiction avec la remarque 3.1, ce qui démontre que F' est maximale.

D) Etude du cas particulier où F est une fonction booléenne associée à un graphe -

Considérons une fonction booléenne F associée à un graphe G (F est la

somme booléenne des monômes associés aux chaînes élémentaires de G joignant deux sommets fixés P_o et P_1 de G).

Appliquant l'algorithme à F, nous construisons une fonction partielle privilégiée F' associée à un graphe G' SP par rapport à deux sommets que nous pouvons désigner par P_o et P_1.

Remarque D.1 -

Etant données les analogies qui existent entre la construction de fonctions partielles booléennes privilégiées maximales et celle de sous-graphes partiels maximaux SP, nous pourrions penser que G' est un sous-graphe partiel de G. Or, en général, ceci est faux.

Nous pouvons nous en rendre compte en nous reportant à l'exemple traité page 66. Nous remarquons que la fonction F considérée dans cet exemple peut être associée au graphe G de la figure 6 ; la fonction F', obtenue par application de l'algorithme III à F, peut être associée au graphe G' de la figure 7. Nous constatons que G' n'est pas sous-graphe partiel de G.

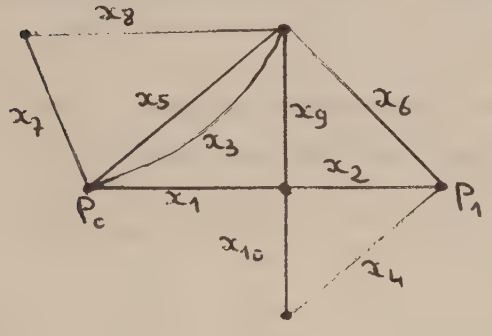


Fig. 6

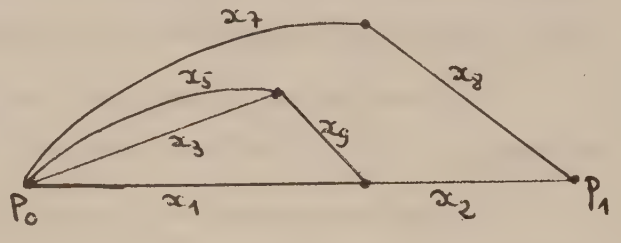


Fig. 7

Proposition D.1 -

> Lorsqu'on applique l'algorithme à des fonctions associées à des graphes nous pouvons remplacer la condition 2) de la 4ème phase par la condition 2') $\exists\, n_o \in N(\alpha)$, $n_o\, u_{i+1} \in \mu F$.

Montrons pour cela que 2) et 2') sont équivalentes. Il est clair que 2) implique 2').

Soit F une fonction booléenne associée à un graphe G ; F est la somme

booléenne des monômes booléens associés aux chaînes élémentaires joignant deux sommets P_o et P_1 fixés de G. Lorsqu'on applique l'algorithme à F, α est le monôme associé à une chaîne γ_α de G ; u_{i+1} est le monôme associé à une chaîne $\gamma_{u_{i+1}}$ de G.

Par définition de N (α), un n-graphe partiel γ_n de G ($n \in N(\alpha)$) est tel que $\gamma_n \cup \alpha$ soit une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1.

Montrons que la condition 2') implique la condition 2).

Soit donc n_o un élément quelconque de N (α) vérifiant $n_o\, u_{i+1} \in \mu F$; cela signifie que le n_o-graphe partiel γ_{n_o} de G vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\gamma_{n_o} \cup \gamma_\alpha$ est une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1.

(2) $\gamma_{n_o} \cup \gamma_{u_{i+1}}$ est une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1.

Les propriétés (1) et (2) impliquent que γ_α et $\gamma_{u_{i+1}}$ ont mêmes extrémités.

Il en résulte que tout sous-graphe de G dont la réunion avec γ_α forme une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1, est telle que sa réunion avec $\gamma_{u_{i+1}}$ forme une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1.

En particulier, pour tout n de N (α), le n-graphe partiel γ_n de G est tel que $\gamma_n \cup \gamma_{u_{i+1}}$ soit une chaîne élémentaire de G allant de P_o à P_1.

Il est équivalent de dire que pour tout n de N (α), $n\, u_{i+1} \in \mu F$; ce qui démontre la proposition D1.

CHAPITRE IV

NOMBRE MAXIMUM D' ARETES D'UN GRAPHE SP-ALGORITHMES DE CARACTERISATION DES GRAPHES SP.

CALCUL DU NOMBRE MAXIMUM D'ARETES D'UN GRAPHE SP, SIMPLE, POSSEDANT n SOMMETS

Considérons un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G tels que

- G soit simple
- $|X(G)| = n$
- G soit SP (P_o, P_1).

Problème -

Trouver la valeur maxima que peut avoir $|E(G)|$.

Remarque : Cette question n'a, évidemment, de sens que si G est simple.

Utilisant les résultats et les notations du chapitre II, nous savons que G, en tant que graphe SP (P_o, P_1), est égal à tout sous-graphe partiel SP (P_o, P_1) maximal qu'il contient.

Appliquant à G l'un des algorithmes du chapitre II, nous pouvons alors écrire $G = \Gamma^o \cup \Gamma^1 \ldots \cup \Gamma^k$.

Rappels -

. Hauteur d'un arête e de G : c'est l'indice i tel qu'il existe une anse γ de Γ^i avec $e \subset \gamma$.

. Hauteur d'un sommet x de G :c'est le plus petit indice j tel qu'il existe une anse γ de Γ^j avec $x \in \gamma$.

Soit m_i le nombre d'arêtes de hauteur i dans G.

Soit n_i le nombre de sommets de hauteur i dans G.

Soit γ_o un élément quelconque de Γ^o, $m(\gamma_o)$ le nombre de ses arêtes, $n'(\gamma_o)$ le nombre de ses sommets intérieurs ; alors $m(\gamma_o)$ et $n'(\gamma_o)$ vérifient $m(\gamma_o) = n'(\gamma_o)+1$.

Donc $m_o = \sum_{\gamma_o \in \Gamma^o} m(\gamma_o) = \sum_{\gamma_o \in \Gamma^o} n'(\gamma_o) + |\Gamma^o| = n_o - |\{P_o, P_1\}| + \Gamma^o$

D'où $m_o = n_o - 2 + |\Gamma^o|$ (1)

de même, soit γ_i un élément quelconque de Γ^i ($i \geq 1$), nous avons encore $m(\gamma_i) = n'(\gamma_i) + 1$.

Mais, puisque i est supérieur ou égal à 1, $n_i = \sum_{\gamma_i \in \Gamma^i} n'(\gamma_i)$.

Donc $m_i = \sum_{\gamma_i \in \Gamma^i} m(\gamma_i) = n_i + |\Gamma^i|$ (2)

Additionnons membre à membre (1) et toutes les égalités (2) pour $i = 1,\ldots,k$

$$m = \sum_{i=o}^{k} m_i = \sum_{i=o}^{k} n_i - 2 + \sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i| = n - 2 + \sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i|.$$

Montrons que $\sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i| \leq n - 1$ -

Supposons que k = o ; il y a, au plus, une chaîne d'extrémités P_o et P_1 ne contenant pas d'autre sommet (cette chaîne existe si $[P_o, P_1] \in E(G)$).

De plus, un sommet $x \neq P_o, P_1$ ne peut appartenir à deux éléments de Γ^o.

Donc $|\Gamma^o| - 1 \leq n_o - 2 = n - 2$ implique $\sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i| = |\Gamma^o| \leq n - 1$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à k - 1 et considérons un graphe $\Gamma^o \cup \ldots \Gamma^k$.

Nous pouvons écrire $\Gamma^k = \Gamma'^k \cup \Gamma''^k$

où Γ'^k désigne l'ensemble des anses de Γ^k de longueur 1

Γ''^k désigne l'ensemble des anses de Γ^k de longueur strictement supérieur à 1.

Nous avons donc $\Gamma'^k \cap \Gamma''^k = \emptyset$

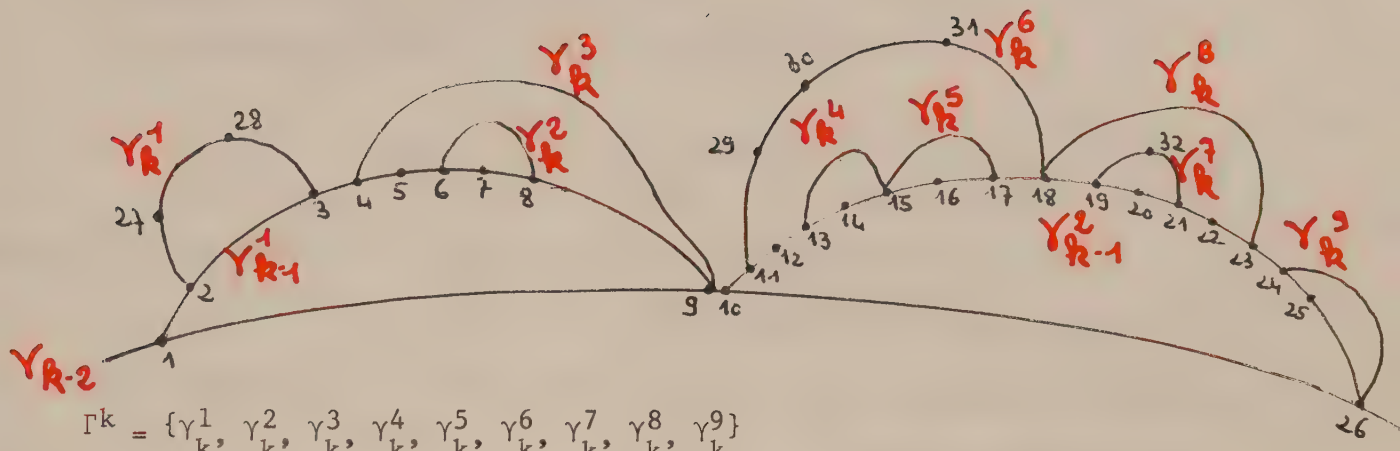
Soit V l'ensemble des intervalles induits par les éléments de Γ'^k sur les éléments de Γ^{k-1}.

Soit V^* l'ensemble des éléments maximaux de V.

Soit X^* l'ensemble des sommets intérieurs aux éléments de V^*.

Soit X* l'ensemble des sommets intérieurs aux éléments de Γ''^k.

Exemple :



$\Gamma^k = \{\gamma^1_k, \gamma^2_k, \gamma^3_k, \gamma^4_k, \gamma^5_k, \gamma^6_k, \gamma^7_k, \gamma^8_k, \gamma^9_k\}$

Alors $\Gamma'^k = \{\gamma^2_k, \gamma^3_k, \gamma^4_k, \gamma^5_k, \gamma^8_k, \gamma^9_k\}$

$\Gamma''^k = \{\gamma^1_k, \gamma^6_k, \gamma^7_k\}$

$V = \{[6,8]_{\gamma^1_{k-1}}, [4,9]_{\gamma^1_{k-1}}, [13,15]_{\gamma^2_{k-1}}, [15,17]_{\gamma^2_{k-1}}, [18,23]_{\gamma^2_{k-1}}, [24,26]_{\gamma^2_{k-1}}\}$

$V^* = \{[4,9]_{\gamma^1_{k-1}}, [13,15]_{\gamma^2_{k-1}}, [15,17]_{\gamma^2_{k-1}}, [18,23]_{\gamma^2_{k-1}}, [24,26]_{\gamma^2_{k-1}}\}$

$X^* = \{5, 6, 7, 8, 14, 16, 19, 20, 21, 22, 25\}$

$X* = \{27, 28, 29, 30, 31, 32\}$

Nous avons, évidemment, $|\Gamma''^k| \leq |X*|$.

. Tout élément de V est de longueur supérieure ou égale à 2.

En effet, sinon cela signifierait que ses deux extrémités sont jointes par au moins deux arêtes, ce qui est impossible puisque G est simple.

. Un élément v de V est induit par un seul élément de Γ'^k.

En effet, sinon il y aurait au moins deux arêtes joignant ses extrémités, ce qui est impossible puisque G est simple.

Notons u (v) l'élément de Γ'^k qui induit v. D'après la remarque précédente, u est une bijection de V sur Γ'^k.

Dans notre exemple, $u\left([6,8]^{1}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^2$

$u\left([4,9]^{1}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^3$, $u\left([13,15]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^4$, $u\left([15,17]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^5$,

$u\left([18,23]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^8$, $u\left([24,26]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = \gamma_k^9$.

Construisons une application f définie sur V, à valeurs dans X^* en posant

. Si v est minimal pour l'inclusion :

v étant de longueur au moins 2, nous prenons pour f (v) un sommet intérieur à v.

. Si v n'est pas minimal :

alors il existe un intervalle v' de V, $v' \subsetneq v$ tel qu'il n'existe pas d'élément v" de V, $v' \subsetneq v'' \subsetneq v$. Puisque $v' \subsetneq v$, l'une au moins des extrémités de v', soit x', est un sommet intérieur à v.

Nous posons f (v) = x'.

Dans notre exemple, les éléments minimaux de V sont

$[6,8]^{1}_{\gamma_{k-1}}$, $[13,15]^{2}_{\gamma_{k-1}}$, $[15,17]^{2}_{\gamma_{k-1}}$, $[18,23]^{2}_{\gamma_{k-1}}$, $[24,26]^{2}_{\gamma_{k-1}}$.

Nous pouvons poser :

$f\left([6,8]^{1}_{\gamma_{k-1}}\right) = 7$, $f\left([13,15]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = 14$, $f\left([15,17]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = 16$

$f\left([18,23]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = 21$, $f\left([24,26]^{2}_{\gamma_{k-1}}\right) = 25$

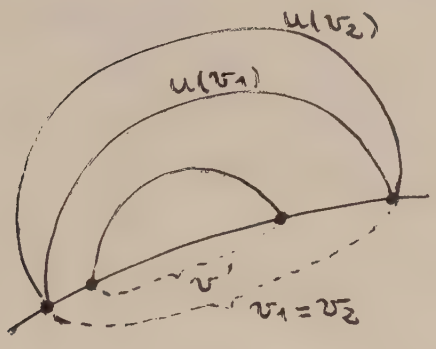
$[4,9]^{1}_{\gamma_{k-1}}$ contient l'intervalle $[6,8]^{1}_{\gamma_{k-1}}$ et nous posons $f\left([4,9]^{1}_{\gamma_{k-1}}\right) = 6$

ou $f\left([4,9]^{1}_{\gamma_{k-1}}\right) = 8$.

Montrons que f est injective.

Soient v_1 et v_2 deux éléments de V. $f(v_1) = f(v_2) = x$ implique que v_1 et v_2 ont un sommet intérieur commun x. Puisque G est SP (P_o, P_1), $u(v_1)$ et $u(v_2)$ sont compatibles ; par conséquent, puisque v_1 et v_2 ont un sommet intérieur commun, v_1 est inclus dans v_2 ou v_2 est inclus dans v_1.

Supposons $v_1 \subset_{\neq} v_2$, alors $f(v_2) = x$ est l'extrémité d'un certain $v' \subset_{\neq} v_2$ d'après la définition de f; mais nous ne pouvons avoir $v' \subset_{\neq} v_1 \subset_{\neq} v_2$; x étant un sommet intérieur à v_1, v' ne peut être égal à v_1.



Par suite, il est impossible que v' soit inclus dans v_1 ; u (v') et u (v_1) étant compatibles, on en déduit que v_1 et v' sont disjointes au sens des arêtes et que, par suite, x est un sommet non intérieur à v_1, ce qui contredit le fait que $f(v_1) = x$. Il est donc impossible d'avoir $v_1 \subset_{\neq} v_2$. De même, nous démontrerions qu'il est impossible d'avoir $v_2 \subset_{\neq} v_1$ et donc $v_1 = v_2$.

Posons $\phi = f \circ u^{-1}$. ϕ est une fonction définie sur Γ'^k à valeurs dans X^*.

Le graphe $\Gamma^\circ \cup \Gamma^1 \cup \ldots \Gamma^{k-1}$ obtenu à partir de G par suppression des anses de Γ^k est SP (P_o, P_1).

Dans ce graphe, appliquons l'opération 2 de la page 23, aux sommets de X^*. D'après le lemme de la page 22, nous savons que le graphe résultant H est SP (P_o, P_1). Le nombre de ses sommets est $n - |X*| - |X^*|$ et le nombre des anses qui le constituent est $\sum_{i=o}^{k-1} |\Gamma^i|$, d'où, par induction

$$\sum_{i=o}^{k-1} |\Gamma^i| \leq n - |X^*| - |X*| - 1$$

On a donc $\sum_{i=o}^{k-1} |\Gamma^i| + |\Gamma'^k| + |\Gamma''^k| \leq n-1$

D'où $\sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i| \leq n-1$

Et donc $m = n - 2 + \sum_{i=o}^{k} |\Gamma^i| \leq n - 2 + n - 1 = 2n - 3.$

$$\boxed{m \leq 2n - 3}$$

Cette borne est la meilleure possible.

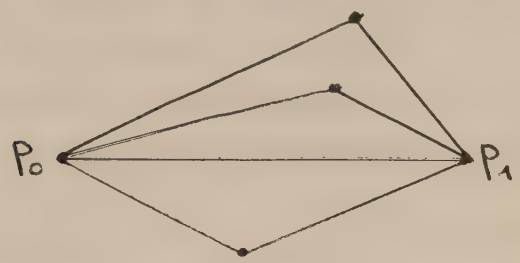
En effet, considérons le graphe de hauteur 0 possédant n-1 anses

. $(P_o, [P_o, P_1], P_1)$

. $(P_o, [P_o, x], [x, P_1], P_1)$ $x \neq P_o, P_1$

Nous avons donc $m = n - 2 + n - 1 = 2n - 3$.

Traçons ce graphe par n = 5



ALGORITHME DE CARACTERISATION DES GRAPHES SP (P_o, P_1)

Soit un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe.

Nous allons établir une caractérisation algorithmique permettant de déterminer si G est SP (P_o, P_1).

Rappelons les deux opérations définies page 22 -

1) Remplacement d'un ensemble d'arêtes parallèles par une seule arête.

2) Contraction élémentaire identifiant deux sommets adjacents dont l'un au moins est de degré 2 et distinct de P_o et de P_1. (En termes intuitifs, l'opération 2) consiste en la suppression d'un sommet x de degré 2, $x \neq P_o, P_1$, et la création d'une arête joignant les deux sommets auxquels x était adjacent).

Nous savons, d'après le lemme de la page 22, que l'ensemble des graphes SP (P_o, P_1) est stable pour les opérations 1) et 2) et leurs opérations inverses.

Notation -

Nous dirons qu'un graphe H (P_o, $P_1 \in H$) est "irréductible" si et seulement si aucune des deux opérations 1) et 2) ne peut lui être appliquée.

Proposition -

G est SP (P_o, P_1) si et seulement si une suite quelconque d'opérations 1) et 2) effectuée à partir de G et transformant ce graphe en un graphe "irréductible" G' est telle que G' soit égal à K_2 avec $X(K_2) = \{P_o, P_1\}$.

Montrons que G SP (P_o, P_1) implique G' = K_2 -

G' est obtenu à partir de G par applications successives d'opérations 1) et 2). G étant SP (P_o, P_1), il en est de même de G'. G' étant irréductible, il ne possède pas d'arêtes multiples et aucun sommet de G', distinct de P_o et de P_1 n'est de degré 2.

Appliquons alors à G' l'un des algorithmes du chapitre II ; nous pouvons écrire G' sous la forme $\Gamma^o \cup \Gamma^1 \ldots \cup \Gamma^k$ où Γ^o est un ensemble de chaînes disjointes (sauf en leurs extrémités) de G' allant de P_o à P_1 et pour tout i, $0 \leq i \leq k-1$, Γ^{i+1} est un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de Γ^i.

Supposons $k \geq 1$.

Comme G' ne possède pas de sommet de degré 2 (sauf peut-être P_o et P_1), toute anse de Γ^k est de longueur 1.

Considérons un élément v minimal (pour l'inclusion) de l'ensemble des intervalles induits sur les anses de Γ^{k-1} par celles de Γ^k. Soit γ_k une anse qui induit l'intervalle v. Puisque G' ne possède pas de sommet de degré 2, v est de longueur 1 ; mais alors, les extrémités de v sont jointes par au moins deux arêtes v et γ_k, ce qui contredit le fait que G' ne possède pas d'arêtes multiples. L'hypothèse $k \geq 1$ est donc absurde et k = 0. Aucun élément γ_o de Γ^o ne contient de sommet intérieur car ceux-ci seraient de degré 2, chaque anse γ_o contient donc une seule arête qui est nécessairement $[P_o, P_1]$ puisque γ_o a P_o et P_1 pour extrémités. Mais alors, puisque G' ne possède pas d'arêtes multiples, $|\Gamma^o|$ est égal à 1. Ainsi, G' possède deux sommets P_o et P_1 joints par une arête $[P_o, P_1]$ et donc G' = K_2 avec $X(G') = \{P_o, P_1\}$.

Réciproquement si G' est égal à K_2 avec $X(K_2) = \{P_o, P_1\}$, G' est SP (P_o, P_1). La classe des graphes SP (P_o, P_1) étant stable pour les opérations inverses de 1) et 2), le graphe G est alors SP (P_o, P_1).

Exemple -

Considérons le graphe G de la figure 1.

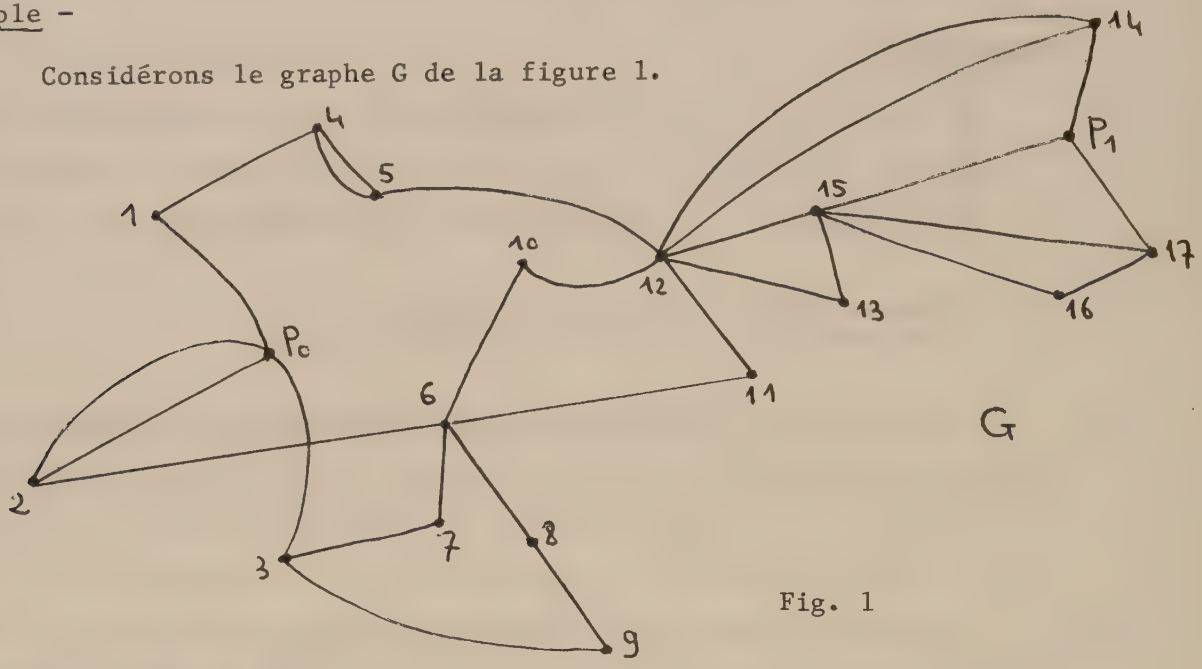


Fig. 1

Par une suite d'opérations 1) nous remplaçons chacun des ensembles d'arêtes parallèles $[4,5]$, $[12,14]$, $[P_o, 2]$ par une seule arête. Nous transformons ainsi G en un graphe G_1.

Par une suite d'opérations 2) nous supprimons les sommets 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16 de G_1. Nous transformons le graphe G_1 en un graphe G_2 (figure 2).

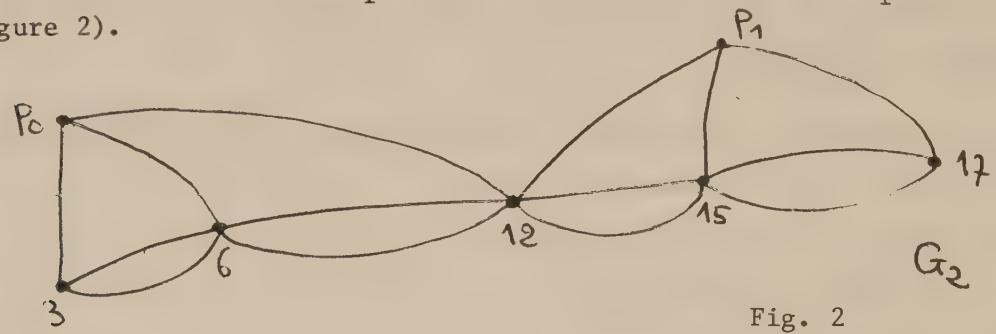


Fig. 2

Par des opérations 1) nous remplaçons chacun des ensembles d'arêtes parallèles $[3,6]$, $[6,12]$, $[12,15]$, $[15,17]$ par une seule arête. Nous transformons ainsi G_2 en un graphe G_3 (figure 3).

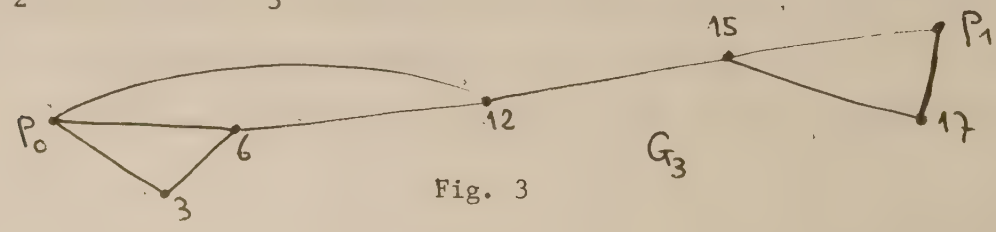


Fig. 3

Par des opérations 2) nous supprimons les sommets 3 et 17 de G_3 ; nous obtenons ainsi un graphe G_4 (figure 4).

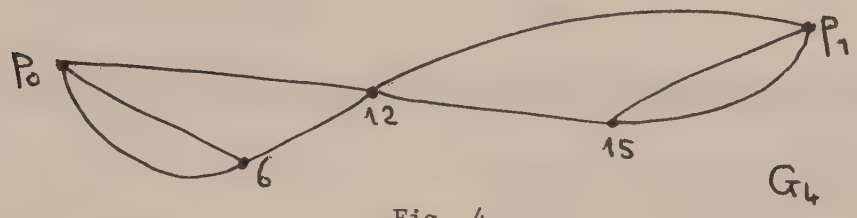


Fig. 4

Nous remplaçons les deux arêtes $[P_o, 6]$ par une seule. Nous faisons de même pour les deux arêtes $[15, P_1]$. Nous transformons ainsi G_4 en G_5 (figure 5).

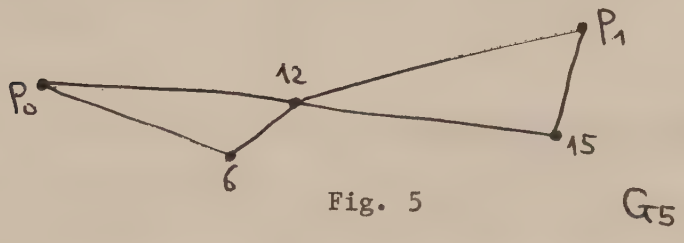


Fig. 5

Par des opérations 3) nous supprimons les sommets 6 et 15 de G_5, obtenant ainsi un graphe G_6 (figure 6).

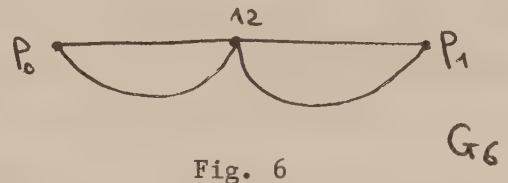


Fig. 6

Par des opérations 1) nous transformons G_6 en G_7 (figure 7).

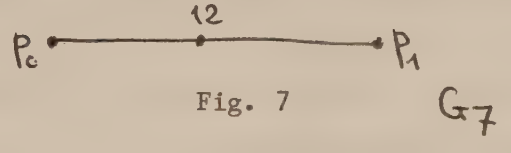


Fig. 7

Nous supprimons le sommet 12 de G_7 par application de l'opération 1). Nous obtenons le graphe K_2 avec $X(K_2) = \{P_o, P_1\}$.

Puisque G est transformable en K_2 par une suite d'opérations 1) et 2), c'est un graphe SP (P_o, P_1).

CARACTERISATION DES GRAPHES SP

Problème -

Etant donné un graphe G, existe-t'il un couple de sommets par rapport auquel G soit SP ?

Si oui, exhiber un tel couple.

Notations -

. Un graphe H sera "irréductible" si aucune des deux opérations 1) et 2) ne peut être appliquée.

Considérons les opérations suivantes :

1) Remplacement d'un ensemble d'arêtes parallèles par une seule arête.

2')Contraction élémentaire identifiant deux sommets adjacents d'un graphe simple dont l'un, au moins, est de degré 2. (En termes intuitifs l'opération 2') ne peut s'appliquer qu'à des graphes simples et, dans ce cas, elle consiste en la suppression d'un sommet x de degré 2 et la création d'une arête joignant les deux sommets auxquels x était adjacent).

Proposition -

G est SP si et seulement si une suite quelconque d'opérations 1) et 2') effectuée à partir de G et transformant ce graphe en un graphe "irréductible" G^* est telle que G^* soit égal à K_2.
S'il en est ainsi X (G^*) est un ensemble de sommets par rapport auquel G est SP.

Montrons que G SP implique $G^* = K_2$ -

Lemme -

Etant donné un graphe G SP (P_o, P_1), simple, dont l'un au moins des sommets P_o ou P_1 (on prendra par exemple P_o) est de degré 2, considérons

le graphe G_1 obtenu en supprimant par l'opération 2') le sommet P_o de G. Alors le graphe G_1 est SP par rapport à un couple de sommets (x, P_1) où $x \in X(G)$, $x \neq P_o$.

Pour démontrer le lemme, nous allons raisonner par induction sur $|X(G)|$.

. Cas où $|X(G)| = 3$ (un graphe ne possèdant qu'un ou deux sommets ne peut vérifier les hypothèses du lemme). G vérifiant les hypothèses du lemme, nous avons nécessairement $G = K_3$. Si nous supprimons, par l'opération 2') le sommet P_o de ce graphe, nous obtenons le graphe de la figure 1 ; ce graphe est SP (x, P_1).

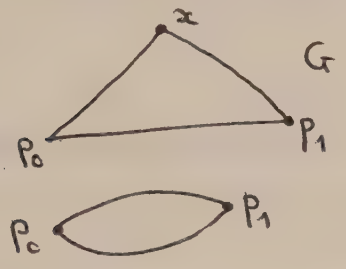


Fig. 1

. Supposons que le lemme soit vrai pour tous les graphes H vérifiant les hypothèses du lemme et tels que $|X(H)| < |X(G)|$.

Puisque X (G) est supérieur ou égal à 3 et que G est SP (P_o, P_1), G est la connection en série ou la connection en parallèle de deux graphes.

1er cas -

$G = G' \; P \; G''$ (connection en parallèle), G' et G'' étant SP (P_o, P_1). P_o est de degré 2 et, par suite, il existe deux sommets qui lui sont adjacents, soit x ($\in G'$) et y ($\in G''$), ces deux sommets.

L'un au moins des deux sommets x et y est différent de P_1.

Nous supposerons, par exemple, $y \neq P_1$.

Supprimons P_o par l'opération 2') ; cela entraîne la suppression des arêtes $[P_o, x]$ et $[P_o, y]$ et la création d'une arête $[x, y]$. $G' - \{P_o\}$ est SP (x, P_1), (si $x = P_1$, $G' - \{P_o\} = \{P_1\}$). Connectant en série le graphe $G' - \{P_o\}$ et l'arête $[y, x]$, nous obtenons un graphe G' qui est SP (y, P_1).

De même $G''_1 = G'' - \{P_o\}$ est SP (y, P_1).

Comme G_1 est la connection en parallèle de G'_1 et de G''_1, G_1 est SP (y, P_1). Si $y = P_1$ et $x \neq P_1$, un raisonnement analogue nous permet de démontrer que G_1 est SP (x, P_1).

2ème cas -

$G = G' \underset{(P_o,P,P_1)}{S} G''$ (connection en série), G' et G'' étant respectivement SP (P_o, P) et SP (P, P_1). Supprimant le sommet P_o par l'opération 2'), nous transformons G' en un graphe G'_1. Puisque $|X(G')| < |X(G)|$, appliquant l'hypothèse d'induction, nous savons que G'_1 est SP (x, P_1), x désignant un sommet de G', distinct de P_o.

Alors, puisque $G_1 = G'_1 \underset{}{S} G''$, G_1 est SP (x, P_1).

Nous allons utiliser ce lemme pour montrer que G SP implique $G^* = K_2$.

Soient donc un graphe G et un couple(P_o, P_1) de sommets de G par rapport auxquels G est SP.

D'après le lemme de la page 22, nous savons que la classe des graphes SP (P_o, P_1) est stable pour toute opération 1) et toute opération 2') supprimant un sommet distinct de P_o et de P_1 ; d'après le lemme ci-dessus, l'application d'une opération 2') supprimant l'un des deux sommets P_o et P_1 transforme un graphe SP (P_o, P_1) en un graphe SP.

Nous en déduisons que G^* est SP.

Soit (t, t'), un couple de sommets par rapport auxquels G^* est SP.

Utilisant l'un des algorithmes du chapitre II, nous pouvons inscrire $G' = \Gamma^o \cup \Gamma^1 \cup \ldots \Gamma^k$ où Γ^o est un ensemble de chaînes élémentaires disjointes (sauf en leurs extrémités), allant de t à t' et Γ^{i+1} un ensemble d'anses compatibles construites sur les éléments de i.

G^* étant irréductible, il ne possède ni sommets de degré 2, ni arêtes multiples.

Supposons $k \geq 1$.

Comme G^* ne possède pas de sommet de degré 2, toute anse de Γ^k est de longueur 1.

Considérons un élément v minimal (pour l'inclusion)de l'ensemble des intervalles induits sur les anses de Γ^{k-1} par celles de Γ^k.

Soit γ_k une anse qui induit l'intervalle v. Puisque G^* ne possède pas de sommet de degré 2, v est de longueur 1 ; mais alors, les extrémités de v

sont jointes par au moins deux arêtes v et γ_k, ce qui contredit le fait que G' ne possède pas d'arêtes multiples.

L'hypothèse $k \geq 1$ est donc absurde et $k = 0$.

Aucun élément γ_o de Γ° ne contient de sommet intérieur, car ceux-ci seraient de degré 2, chaque anse γ_o contient donc une seule arête qui est nécessairement $[t, t']$ puisque γ_o a t et t' pour extrémités.

Mais alors, puisque G^* ne possède pas d'arêtes multiples, $|\Gamma^\circ|$ est égal à 1.

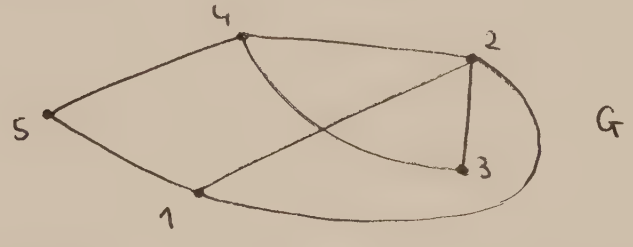
Ainsi G^* possède deux sommets t et t' joints par une arête $[t, t']$ et donc $G^* = K_2$ avec $X(G^*) = \{t, t'\}$.

Montrons que si G^* est égal à K_2 avec $X(G^*) = \{x, y\}$, alors G est SP (x, y) .

Par une suite d'opérations 1) et de contractions élémentaires identifiant deux sommets adjacents dont l'un au moins est de degré 2 et distinct de x et de y (car $x, y \in G^*$), nous transformons G en un graphe $G^* = K_2$ avec $X(G^*) = \{x, y\}$.

Appliquant la proposition de la page 89, nous en déduisons que G est SP (x, y).

Exemple - Considérons le graphe simple G.



Par application d'opérations 2'), nous supprimons le sommet 3 de G ; nous obtenons le graphe G_1 de la figure 1.

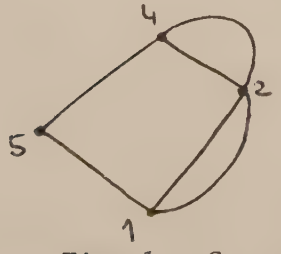


Fig. 1 - G_1 -

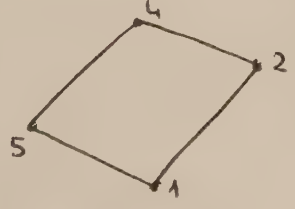


Fig. 2 - G_2 -

Par des opérations 1) nous transformons G_1 ou G_2 (figure 2). G_2 étant simple, nous pouvons supprimer le sommet 4 par application de 2'). Nous obtenons le graphe G_3 (figure 3). G_3 est simple, nous supprimons le sommet 1 par application de 2').

Fig. 3 - G_3 -

Fig. 4 (G_4) -

Dans le graphe G_4 (figure 4) ainsi obtenu, nous remplaçons les deux arêtes $[5,2]$ par une seule.

Nous obtenons K_2 dont les deux sommets sont 5 et 2. G est donc SP (5,2).

CHAPITRE V

INVARIANT σ D'UN GRAPHE

INVARIANT σ D'UN GRAPHE

Soit un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G.

NOTATIONS ET DEFINITIONS -

1 - Dans ce chapitre, la notation abrégée "chaîne $P_o - P_1$" de G désignera une chaîne de G allant de P_o à P_1.

2 - Nous dirons que l'ensemble $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, où les G_i sont des sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de G, forme un recouvrement de G relativement à P_o et P_1 si et seulement si toute chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de G est contenue dans au moins un des graphes $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

3 - Nous appelerons $\sigma_{(P_o,P_1)}(G)$ le cardinal minimum d'un tel recouvrement de G.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous remplacerons $\sigma_{(P_o,P_1)}(G)$ par la notation simplifiée $\sigma(G)$.

Remarque - Si une arête e de G est telle qu'il n'existe aucune chaîne élémentaire $P_o - P_1$ contenant e, cette arête n'a aucune influence sur la recherche d'un recouvrement de G. D'où : $\sigma(G) = \sigma(G - \{e\})$. Nous pouvons donc nous limiter à l'étude de graphes dont chaque arête soit contenue dans une chaîne élémentaire $P_o - P_1$. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce chapitre.

ETUDE DE L'INVARIANT σ DES GRAPHES COMPLETS -

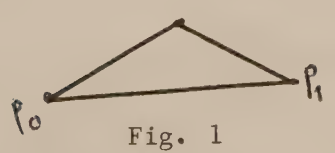


Fig. 1

Considérons le graphe K_3 de la figure 1. Il est SP (P_o, P_1), ce qui implique que $\sigma(K_3) = 1$.

Définition - Nous dirons que deux chaînes élémentaires $P_o - P_1$ d'un graphe G sont inconciliables si et seulement si le sous-graphe partiel formé par ces deux chaînes n'est pas SP (P_o, P_1).

Exemple - Considérons le graphe G de la figure 2. Les deux chaînes $(P_o, 2, 1, P_1)$ et $(P_o, 1, 2, P_1)$ sont inconciliables. En effet, le sous-graphe partiel H formé de la réunion de ces deux chaînes, n'est pas SP (P_o, P_1).

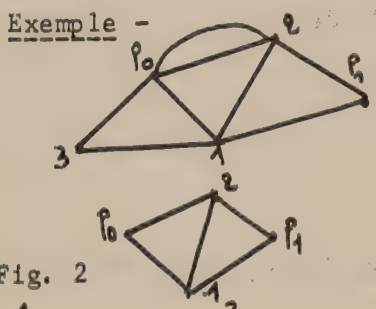
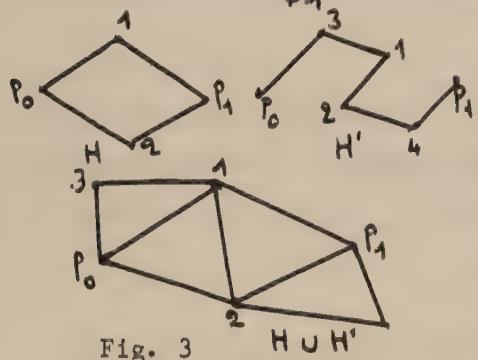


Fig. 2



Les deux graphes H et H' représentés sur la figure 3 sont inconciliables. En effet, considérons le graphe $H \cup H'$; l'arête $[1,2]$ ne vérifie pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; $H \cup H'$ n'est donc pas SP (P_o, P_1) et H et H' sont inconciliables.

Fig. 3

Considérons K_n, graphe complet à n sommets. Soient 1, 2,..., n les sommets de ce graphe ; $P_o = 1$, $P_1 = n$.

Nous représentons les chaînes élémentaires du graphe par la suite des sommets qu'on y rencontre lorsqu'on les parcourt de P_o vers P_1. K_n possède $(n-2)!$ chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de longueur n-1, elles sont représentées par les $(n-2)!$ permutations de l'ensemble : $\{2, 3,..., i, i+1,..., n-1\}$, chacune de ces chaînes ayant pour extrémité initiale 1 et pour extrémité finale n.

Considérons deux telles chaînes : $C = (1, i_2, i_3, i_4,..., i_{n-1}, n)$ et $C' = (1, j_2, j_3,..., j_{n-1}, n)$. Soit k le plus petit entier tel que $i_k \neq j_k$, supposons, par exemple, $i_k < j_k$, et, soit l, le plus grand entier tel que $j_l < j_k$ (on a : $l > k$ et $j_l \geq i_k$) ; nous en déduisons que $C \cup C'$ contient le graphe H de la figure 4.

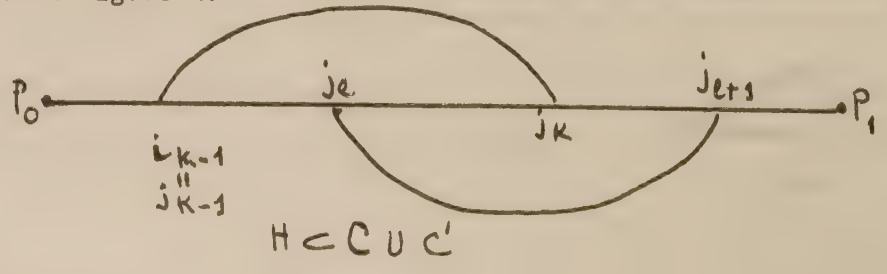


Fig. 4

Ce graphe H, sous-graphe partiel de $C \cup C'$, possède plus de trois sommets et n'est pas SP (P_o, P_1) ; $H \cup [P_o, P_1]$ étant 2-connexe, la propriété de la page 6 nous permet d'affirmer que $C \cup C'$ n'est pas SP (P_o, P_1). Les deux chaînes C et C' sont donc inconciliables.

Comme les (n-2)! chaînes $P_o - P_1$ sont inconciliables deux à deux, elles doivent appartenir à des graphes distincts d'un même recouvrement de G. D'où : $\sigma(G) \geq (n-2)!$

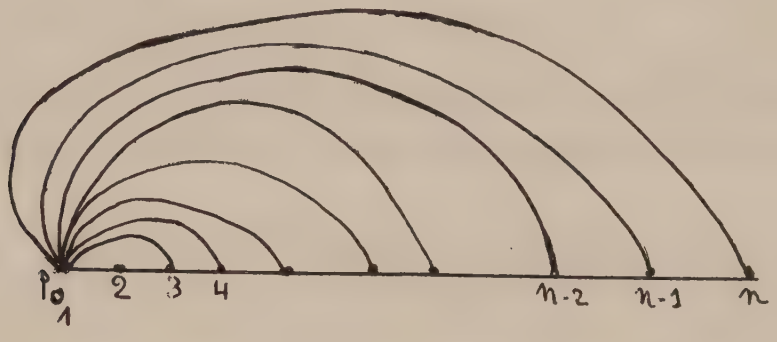


Fig. 5

Considérons le graphe H_{τ_1} de la figure 5.

H_{τ_1} recouvre toutes les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de quelque longueur qu'elles soient, sous réserve que les sommets rencontrés le soient dans l'ordre de la permutation $\tau_1 = (2, 3, \ldots, n-1)$.

Appelons $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_{(n-2)!}$ les autres permutations de l'ensemble $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ et $H_{\tau_2}, H_{\tau_3}, \ldots, H_{\tau_{(n-2)!}}$ les graphes correspondants

$\{H_{\tau_1}, H_{\tau_2}, H_{\tau_3}, \ldots, H_{\tau_{(n-2)!}}\}$ forment alors un recouvrement de G par (n-2)! sous-graphes partiels SP (P_o, P_1). D'où $\sigma(G) \leq (n-2)!$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\sigma(K_n) = (n-2)!}$$

ETUDE DE L'INVARIANT σ DE CERTAINS GRAPHES BIPARTIS COMPLETS -

Considérons le graphe simple biparti complet $K_{m,n}(A,B)$, où A et B désignent ses sous-ensembles de sommets non adjacents. On précise que $|A| = m$ et $|B| = n$.

1er cas - $P_o, P_1 \in A$ et $m-1 = n$.

Nous noterons 1', 2',..., (m-2)', (m-1)', m' les sommets de A (P_o'', P_1'')

et 1", 2",...., ..., n" les sommets de B.

Nous remarquons alors qu'une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ est représentée par une suite de sommets accentués alternativement par des ' et des ".

Il existe alors (m-2)! (n)! chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de longueur m+n-1 = m+m-1-1 = 2m - 2. Elles sont représentées par les (m-2)! n! façons d'écrire une suite utilisant tous les éléments : 1', 2',..., (m-2)' et 1", 2",..., n", sachant qu'un élément de A doit être suivi d'un élément de B et vice versa.

Considérons le graphe de la figure 6.

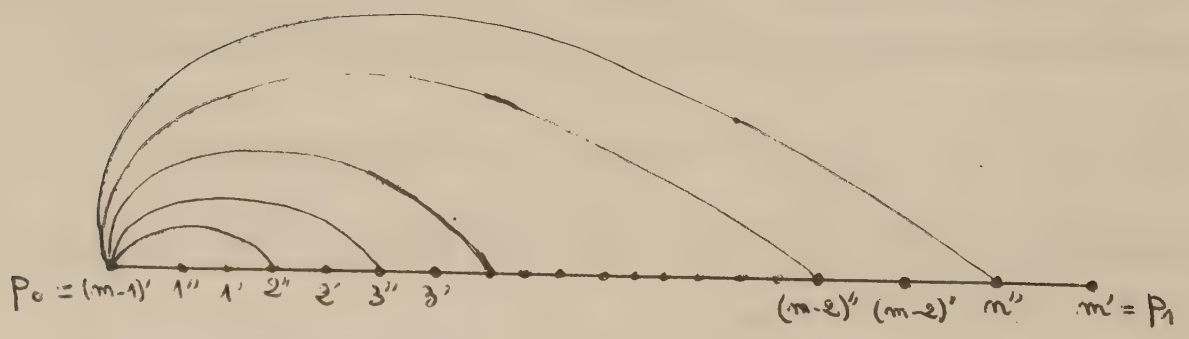


Fig. 6

Ce graphe recouvre toutes les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de quelque longueur qu'elles soient, sous réserve que, sur cette chaîne les sommets de A

soient rencontrés dans l'ordre : (m-1)', 1', 2', 3',..., (m-2)', m' et ceux de B dans l'ordre : 1", 2", 3",....., n".

En considérant les (m-2)! n! ordres possibles de rencontre des sommets de A et de B, à chacun de ceux-là nous pouvons associer un graphe du type de celui de la figure 6. Nous obtenons une famille de graphes $SP(P_o, P_1)$, sous-graphes partiels de $K_{m,n}$, qui recouvrent bien toutes les chaînes élémentaires $P_o - P_1$. Ceci implique $\sigma(G) \leq n!\ (m-2)!$.

Considérons deux chaînes de longueur 2m-2.

$((m-1)', i''_2, i'_2, i''_3, i'_3, \ldots\ldots, i''_{m-2}, i'_{m-2}, i''_{m-1}, m') = C_1$

$((m-1)', j''_2, j'_2, j''_3, j'_3, \ldots\ldots, j''_{m-2}, j'_{m-2}, j''_{m-1}, m') = C_2$

Soit (i_k, j_k) le premier couple vérifiant $i_k \neq j_k$, $i_k \in C_1$, $j_k \in C_2$; supposons que ce soit un couple de sommets accentués par des ' (s'ils sont accentués par des ", le raisonnement est le même) ; nous pouvons supposer $i'_k < j'_k$ (même raisonnement si $j'_k < i'_k$). Par suite, il existe un sommet α du graphe qui se trouve situé dans l'intervalle $[i'_k, j'_k[$ de la chaîne C_1 et tel que le successeur x de α sur C_2 soit un sommet de l'intervalle $]j'_k, m']$ de C_1.

Figure 7

Le graphe de la figure 7 est un sous-graphe partiel de $C_1 \cup C_2$, possède plus de trois sommets, et n'est pas SP (P_o, P_1) ; $H \cup [P_o, P_1]$ étant 2-connexe, la propriété de la page 6 nous permet d'affirmer que $C_1 \cup C_2$ n'est pas SP (P_o, P_1). Les deux chaînes C_1 et C_2 sont donc inconciliables.

Nous démontrons ainsi que les (m-2)! n! chaînes de longueur 2m-2 sont inconciliables deux à deux ; elles appartiennent donc à des graphes distincts d'un même recouvrement de G, ce qui implique $\sigma(G) \geq (m-2)!\ n!$.

et donc $\boxed{\sigma(G) = (m-2)!\ n! = (n-1)!\ n!}$

2ème cas - $P_o \in A$, $P_1 \in B$ et $m = n$.

Nous noterons $P_o = 1', 2', \ldots, m'$ les sommets de A

et $P_1 = 1'', 2'', \ldots, n''$ les sommets de B.

Dans ce cas, il existe $(m-1)!\ (n-1)! = 2\ [(n-1)!]$ chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de longueur $m+n-1 = 2n-1$.

De même que dans le premier cas, de telles chaînes sont ici encore inconciliables. D'où $\sigma(G) \geq 2\ (n-1)!$.

Considérons alors le graphe de la figure 8.

Figure 8

Ce graphe recouvre toutes les chaînes élémentaires de P_o à P_1 de quelque longueur qu'elles soient, sous réserve que les sommets de A soient rencontrés dans l'ordre 1', 2', 3', 4', ..., m' et ceux de B dans l'ordre 2", 3", 4", 5", ..., m", 1".

Considérons les (m-1)! (n-1)! ordres possibles de rencontre des sommets de A et B ; à chacun d'eux nous pouvons associer un graphe du type de celui de la figure 8 ; nous obtenons ainsi une famille de graphes qui recouvrent bien les chaînes élémentaires $P_o - P_1$. Comme, de plus, ces graphes sont des sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de G, ceci implique

$\sigma(G) \leq (m-1)!\,(n-1)! = 2.(n-1)!$

et donc $\boxed{\sigma(G) = 2.(n-1)!}$

AUTRE EXEMPLE -

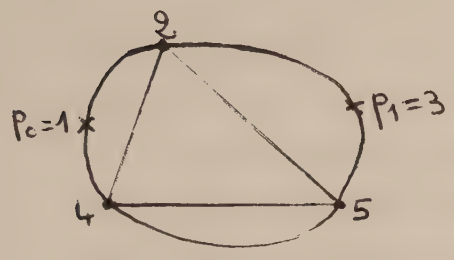


Fig. 9

Considérons le graphe H de la figure 9. Pour étudier l'invariant σ de ce graphe, faisons la remarque suivante. Dans un graphe G possèdant deux sommets a et b joints par au moins deux arêtes, pour toute arête e d'extrémités a et b, $\sigma(G)$ est égal à $\sigma(G - \{e\})$.

Appliquons cette remarque à notre exemple. H_1 désignant le graphe de la figure 10, nous avons $\sigma(H) = \sigma(H_1)$. Calculons donc $\sigma(H_1)$. Les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de H_1 sont :
(1,2,3) ; (1,4,5,3) ; (1,2,4,5,3) ; (1,2,5,3) ; (1,4,2,3) ; (1,4,5,2,3).

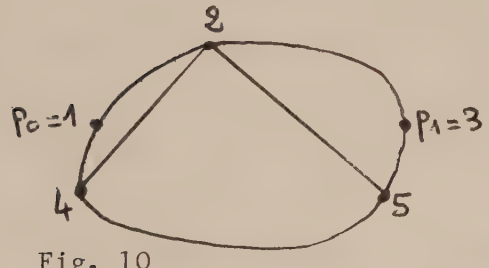


Fig. 10

(1,2,4,5,3) et (1,4,2,3) sont inconciliables ; elles appartiennent donc à deux graphes différents d'un même recouvrement de H_1. Considérons donc un recouvrement de G de cardinal $\sigma(G)$ et désignons par G_1 (resp. G_2) un graphe du recouvrement qui contienne (1,2,4,5,3) (resp.(1,4,2,3)).

Les chaînes (1,2,5,3) et (1,4,5,2,3) sont inconciliables. Si G_1 contient (1,2,5,3) et que G_2 contient (1,4,5,2,3) (ou vice versa), les deux graphes G_1 et G_2 sont inconciliables avec les chaînes (1,2,3) et (1,4,5,3) considérées comme graphes.

Le recouvrement comporte donc au moins trois graphes, ce qui implique $\sigma(H_1) \geq 3$.

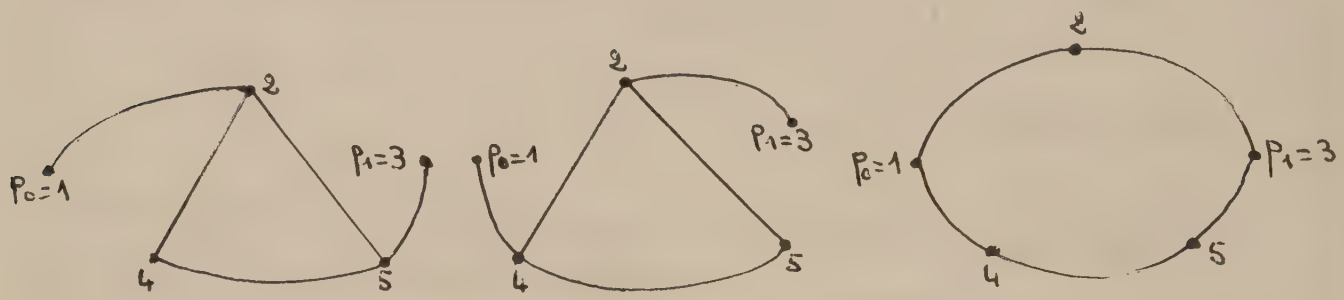


Figure 11

Les graphes de la figure 11 sont, en outre, trois sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de H_1 qui recouvrent H_1, ce qui implique $\sigma(H_1) \leq 3$ et donc

$$\boxed{\sigma(H) = \sigma(H_1) = 3}$$

INVARIANT σ DES GRAPHES W_n (n impair) -

Rappelons la définition de W_n.

Etant donné un cycle élémentaire C_{n-1} de longueur n-1 et un sommet x n'appartenant pas à $X(C_{n-1})$, W_n est le graphe défini par les relations suivantes :

$$X(W_n) = X(C_{n-1}) \cup \{x\} \; ; \; E(W_n) = E(C_{n-1}) \cup \{[x,y] \; / \; y \in X(C_{n-1})\}$$

Nous allons déterminer, dans ce paragraphe, la valeur de $\sigma(W_n) = \sigma_{(P_o,P_1)}(W_n)$ dans le cas où W_n vérifie les conditions suivantes :

. n est impair

. P_o et P_1 sont deux sommets de C_{n-1} qui déterminent sur ce cycle deux chaînes $P_o - P_1$ de longueurs égales.

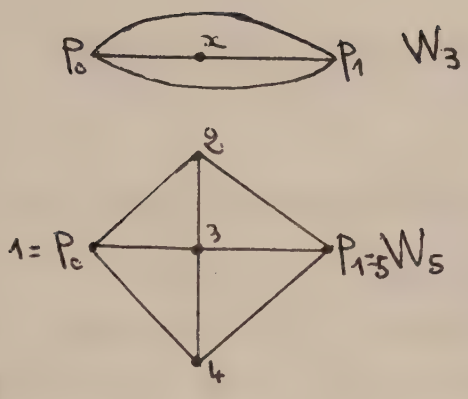


Fig. 12

Remarquons que le graphe W_3 de la figure 12 est $SP(P_o, P_1)$, d'où $\sigma(W_3) = 1$. Etudions le graphe W_5 de la figure 12. Les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de W_5 sont (1,2,3,4,5) ; (1,2,3,5) ; (1,2,5) ; (1,3,2,5); (1,3,5) ; (1,3,4,5) ; (1,4,5) ; (1,4,3,5) ; (1,4,3,2,5).

Considérons les deux chaînes (1,2,3,5) et (1,3,2,5) ; elles sont inconciliables, ce qui implique $\sigma(W_5) \geq 2$.

Considérons un recouvrement de W_5 de cardinal $\sigma(W_5)$; soit G_1 un graphe du recouvrement qui contienne (1,2,3,5) et G_2 un autre graphe de ce recouvrement qui contienne (1,3,2,5).

Les chaînes (1,3,4,5) et (1,4,3,5) sont inconciliables, elles sont donc contenues dans deux graphes différents du recouvrement.

. Si G_1 contient (1,3,4,5), et que G_2 contient (1,4,3,5), G_1 et G_2 sont inconciliables avec les chaînes (1,2,5) et (1,4,5) considérées comme graphes.

. Si G_1 contient (1,4,3,5) et que G_2 contient (1,3,4,5) G_1 et G_2 sont inconciliables avec les chaînes (1,2,5) et (1,4,5) considérées comme graphes.

Le recouvrement considéré contient donc au moins trois graphes, ce qui implique $\sigma(W_5) \geq 3$.

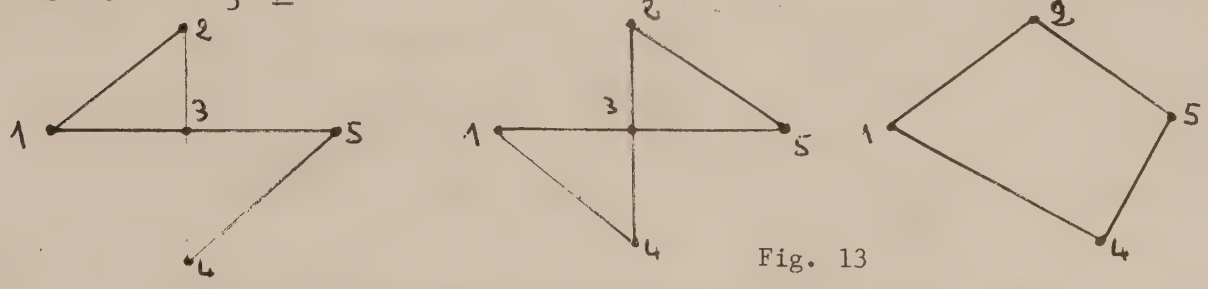
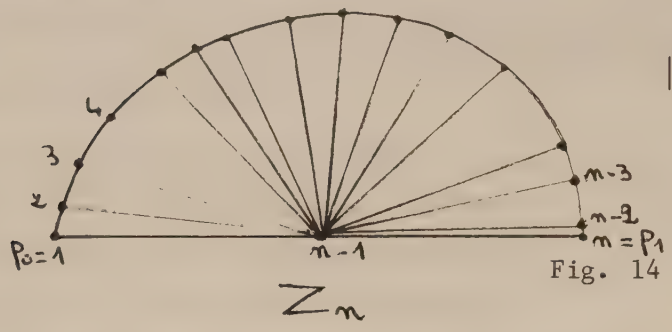


Fig. 13

Les graphes de la figure 13 étant des sous-graphes partiels $SP(P_o,P_1)$ de W_5, ils forment un recouvrement de W_5 ; ceci implique $\sigma(W_5) \leq 3$, et donc

$$\boxed{\sigma(W_5) = 3}$$

Avant d'étudier W_n, étudions le graphe Z_n représenté à la figure 14.



$|X(Z_n)| = n$

Fig. 14

Considérons les n-2 permutations des n premiers entiers telles que

1) n-1 ne soit pas placé à l'une des extrémités de la suite.

2) 1, 2, 3,..., n-3, n-2, n soient placés dans l'ordre croissant;

ces n-2 suites représentent n-2 chaînes élémentaires $P_0 - P_1$ de Z_n. Deux telles chaînes sont inconciliables car elles correspondent à deux permutations différentes $\in \{2, 3,....., n-1\}$. Par suite, tout recouvrement de G comporte au moins n-2 graphes et $\sigma(G)$ est supérieur ou égal à n-2.

Considérons alors les n-2 graphes de la figure 15.

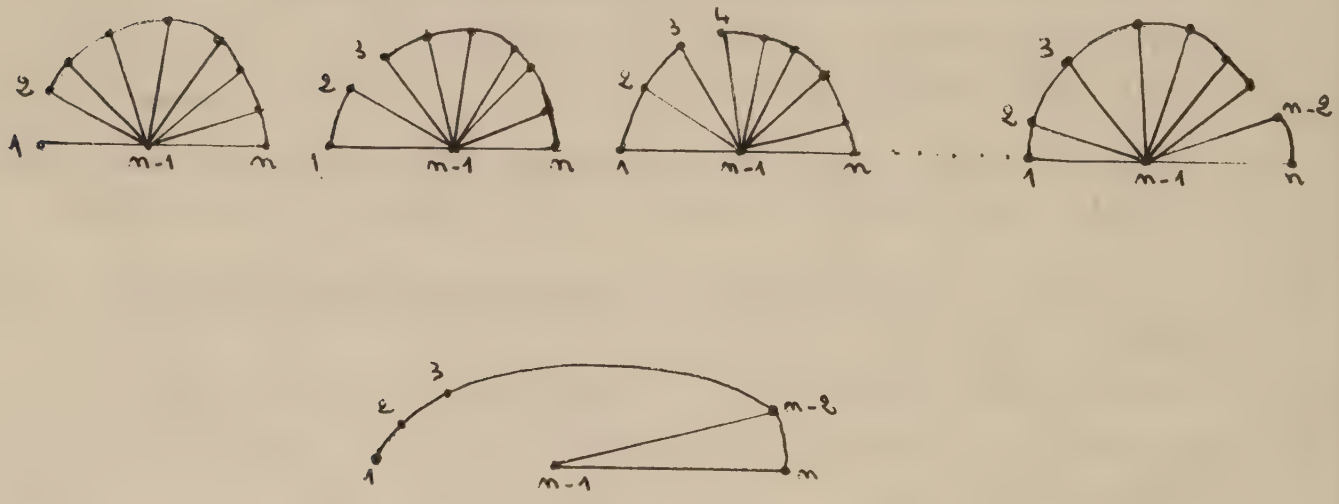


Fig. 15

Les n-3 premiers graphes de cette figure sont les graphes

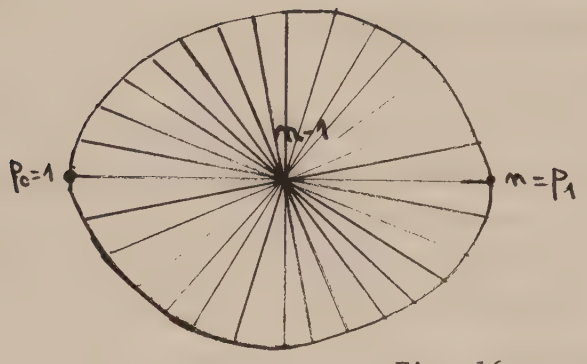
$G - \{[i, i+1]\}$ où i = 1, 2, 3,....., n-3 ; le $n-2^{ème}$ est

$G - \{\bigcup_{i=1}^{n-3} [i, n-1]\}$.

Ces n-2 graphes sont des sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de G et recouvrent G. D'où $\sigma(G) \leq n-2$

donc $\boxed{\sigma(G) = n-2}$

Etude de $\sigma(W_n)$, où n est un entier impair supérieur ou égal à 5.

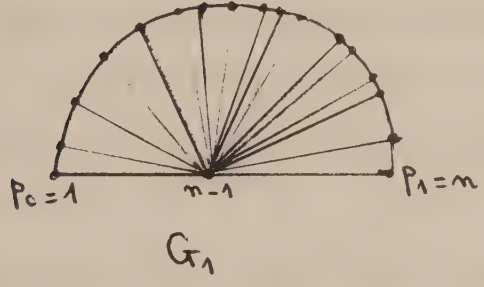


$G = Z_n$

Fig. 16

Ce graphe contient 2 sous-graphes partiels particuliers et isomorphes G_1 et G_2. G_1 est le graphe constitué des sommets 1, n-1, n, et des arêtes $[1, n-1]$, $[n-1, n]$ et de tout ce qui se trouve situé au-dessus de la chaîne $(1, [1, n-1] , n-1, [n-1, n] , n)$. G_2 est le graphe symétrique de celui-ci par rapport à cette chaîne. G_1 et G_2 ont chacun $\frac{n-3}{2} + 3 = \frac{n+3}{2}$ sommets. G_1 et G_2 sont représentés à la figure 17.

D'après l'étude précédente, un recouvrement de G_1 (resp. G_2) possède au moins $\frac{n+3}{2} - 2 = \frac{n-1}{2}$ éléments. Par suite tout recouvrement de W_n possède au moins $\frac{n-1}{2}$ graphes.



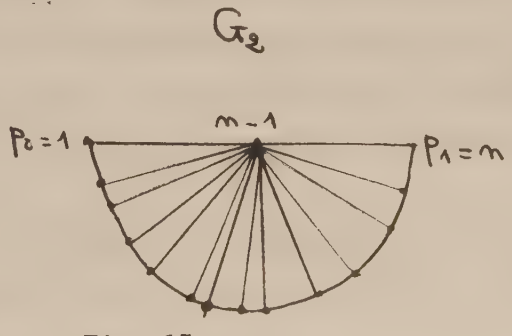


Fig. 17

NOTATIONS -

Nous appellerons chaîne extérieure de G_1 le sous-graphe $G_1 - \{n-1\}$ de G_1. Nous désignerons cette chaîne par Γ^1. Les arêtes de G_1 qui n'appartiennent pas à Γ^1 sont appelées rayons de G.

Nous appellerons chaîne extérieure de G_2 le sous-graphe $G_2 - \{n-1\}$ de G_2. Nous désignerons cette chaîne par Γ^2. Les arêtes de G_2 qui n'appartiennent pas à Γ^2 sont appelées rayons de G.

Soit G un graphe, P_o et P_1 deux de ses sommets, H un sous-graphe partiel de G contenant P_o et P_1. Considérons un recouvrement $\mathcal{C}$ de G par des graphes SP (P_o, P_1). Pour tout graphe C de $\mathcal{C}$ nous notons H(C) le graphe obtenu à partir de $H \cap C$ par suppression des arêtes qui ne sont contenues dans aucune chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de $C \cap H$. Considérons la famille $\{H(C) / C \in \mathcal{C}\}$. Soit μ une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ quelconque de H. Puisque H est inclus dans G, μ est une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de G, il existe donc un graphe C_o de $\mathcal{C}$ qui contienne μ, ce qui implique $\mu \subset C_o \cap H$. Toute arête de μ, étant contenue dans la chaîne μ de $C_o \cap H$, appartient à $H(C_o)$, ce qui implique $\mu \subset H(C_o)$. Toute chaîne $P_o - P_1$ de H est contenue dans l'un des graphes de la famille $\{H(C) / C \in \mathcal{C}\}$, celle-ci forme donc un recouvrement de H ; nous l'appellerons trace de $\mathcal{C}$ sur H ou recouvrement induit par $\mathcal{C}$ sur H.

Supposons qu'il existe un recouvrement $\mathcal{C}$ de G de cardinal $\frac{n-1}{2}$; $\mathcal{C}$ induit sur G_1 un recouvrement $\mathcal{C}_1$ et sur G_2 un recouvrement $\mathcal{C}_2$.

Considérons l'ensemble de chaînes élémentaires de G_1 dont chaque élément est obtenu à partir de Γ^1 par suppression d'une arête e_1 de Γ^1 et adjonction des deux rayons r_{e_1} et r'_{e_1} qui sont adjacents à cette arête. r_{e_1} désignera par convention celui des deux rayons dont l'extrémité est la première rencontrée quand on parcourt Γ^1 de P_o à P_1. Nous noterons $\mathcal{S}_1$ cet ensemble de chaînes.

Considérons l'ensemble de chaînes élémentaires de G_2 dont chaque élément est obtenu à partir de Γ^2 par suppression d'une arête e_2 de Γ^2 et adjonc-

tion des 2 rayons r_{e_2} et r'_{e_2} qui sont adjacents à cette arête. r_{e_2} désignera par convention celui des deux rayons dont l'extrémité est la première rencontrée quand on parcourt Γ^2 de P_o à P_1. Nous noterons $\mathcal{S}_2$ cet ensemble de chaînes. La figure 18 représente un élément de $\mathcal{S}_1$ et un élément de $\mathcal{S}_2$.

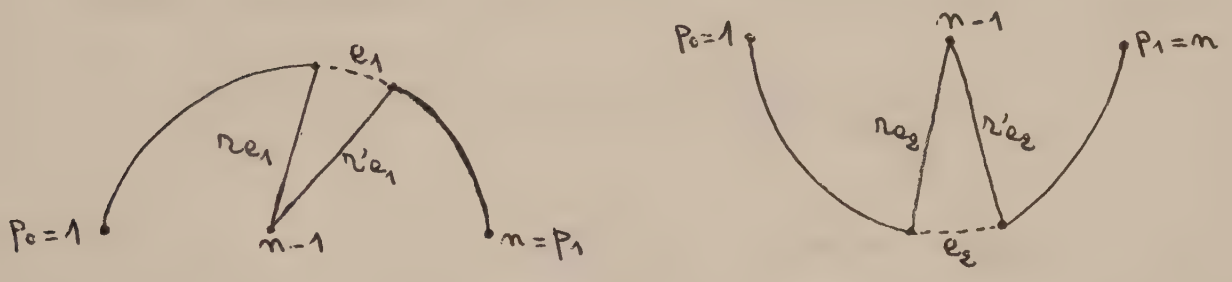


Fig. 18

D'après l'étude de l'invariant σ de Z_n (page 11), nous savons que deux chaînes de $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) sont inconciliables. Nous en déduisons que deux chaînes distinctes de $\mathcal{S}_1$(resp. de $\mathcal{S}_2$) sont contenues dans deux graphes différents de $\mathcal{C}_1$ (resp. de $\mathcal{C}_2$).

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant induits par $\mathcal{C}$, $|\mathcal{C}_1|$ et $|\mathcal{C}_2|$ sont inférieurs ou égaux à $\frac{n-1}{2}$. Puisque $|\mathcal{S}_1| = |\mathcal{S}_2| = \frac{n-1}{2}$, nous avons $|\mathcal{C}_1| \leq |\mathcal{S}_1|$

$|\mathcal{C}_2| \leq |\mathcal{S}_2|$

Par suite, tout graphe de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) contient une chaîne de $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$). Tout graphe de $\mathcal{C}$ contient donc une chaîne de $\mathcal{S}_1$ et une chaîne de $\mathcal{S}_2$. Il est équivalent de dire que pour tout élément C de $\mathcal{C}$, il existe une arête $e_1(C)$ de Γ^1 et une arête $e_2(C)$ de Γ^2 telles que C contienne $(\Gamma^1 - \{e_1(c)\}) \cup \{r_{e_1}(c), r'_{e_1}(c)\} \cup (\Gamma^2 - \{e_2(c)\}) \cup \{r_{e_2}(c), r'_{e_2}(c)\}$. Comme, de plus, Γ^1 est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1, il existe un graphe C_o de $\mathcal{C}$ qui contienne Γ^1 et donc le graphe

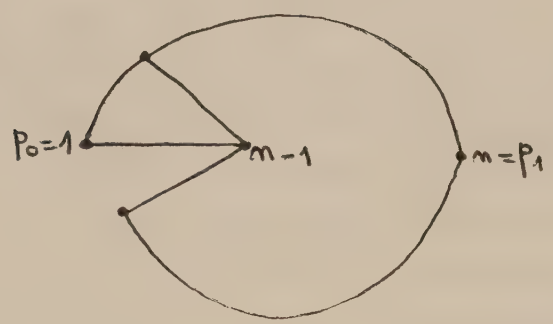
$(\Gamma^1 - \{e_1(c)\}) \cup \{r_{e_1}(c), r'_{e_1}(c)\} \cup (\Gamma^2 - \{e_2(c)\}) \cup \{r_{e_2}(c), r'_{e_2}(c)\} \cup \Gamma^1$.

Nous désignerons par G_o ce dernier graphe.

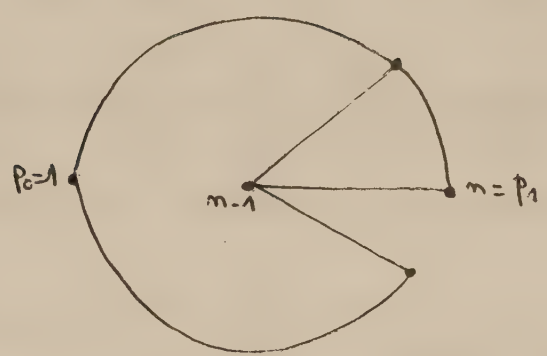
Puisque n est supérieur ou égal à 5 et que $r_{e_1(C_o)}$ et $r'_{e_1(C_o)}$ (resp. $r_{e_2(C_o)}$ et $r'_{e_2(C_o)}$) sont adjacents à une même arête de Γ^1 (resp. de Γ^2) nous avons $|\{r_{e_1(C_o)}, r'_{e_1(C_o)}, r_{e_2(C_o)}, r'_{e_2(C_o)}\}| \geq 3$

Nous distingions 3 cas de figure pour G_o.

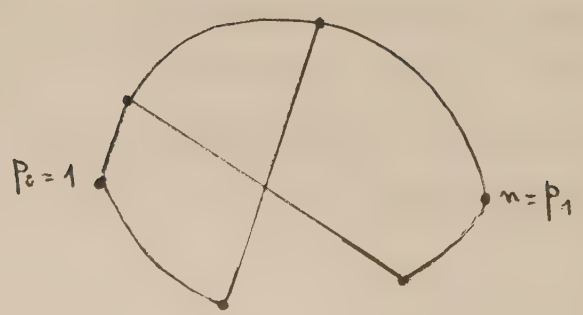
1) $r_{e_1(C_o)} = r_{e_2(C_o)} = [1, n-1]$



2) $r'_{e_1(C_o)} = r'_{e_2(C_o)} = [n-1, n]$



3) $r_{e_1(C_o)} \neq r_{e_2(C_o)}$; $r'_{e_1(C_o)} \neq r'_{e_2(C_o)}$



Dans **chacun des cas** le graphe G_o a un invariant σ au moins égal à 2. Nous en déduisons que C_o n'est pas SP (P_o, P_1), ce qui est impossible puisqu'il appartient au recouvrement $\mathcal{C}$. Nous aboutissons à une impossibilité, ce qui nie l'existence d'un recouvrement de $G = W_n$ de cardinal $\frac{n-1}{2}$.

Un recouvrement de cardinal minimum de W_n possède donc au moins $\frac{n-1}{2} + 1$ graphes. Ceci implique $\sigma(G) \geq \frac{n+1}{2}$.

Considérons alors les graphes de la figure 19.

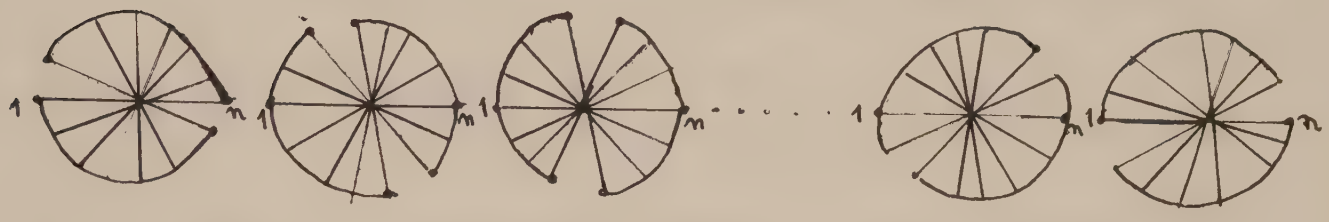


Fig. 19

Nous vérifions que ces $\frac{n-1}{2}$ graphes et le graphe $C'_1 \cup C'_2$ de la figure 20 forment un recouvrement de W_n. En effet, une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de W_n possède nécessairement l'une des deux propriétés suivantes.

1) Elle ne contient aucun rayon et est alors recouverte par le graphe $C'_1 \cup C'_2$.

2) elle contient 2 rayons et est alors recouverte par l'un des $\frac{n-1}{2}$ graphes de la figure 19.

Fig. 20

Ceci implique $\sigma(G) \leq \frac{n+1}{2}$

d'où $\boxed{\sigma(G) = \frac{n+1}{2}}$

PROPRIETES -

Rappel - Dans un graphe G, on appelle bloc, un sous-graphe de G connexe, sans point d'articulation et maximal pour ces propriétés. Les blocs de G sont donc des sous-graphes de G disjoints au sens des arêtes et dont la réunion forme G.

Proposition 1 - Soient $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ les blocs d'un graphe quelconque G dont P_o et P_1 sont deux sommets. Nous désignerons par B_i un bloc qui contient P_o et par B_j un bloc qui contient P_1.

1) Si $i = j$, $\sigma(G) = \sigma(B_i)$.

En effet, aucune arête d'un bloc B_k, $k \neq i$, n'est alors contenue dans une chaîne élémentaire $P_o - P_1$. Ceci implique bien $\sigma(G) = \sigma(B_i)$.

2) Si i différent de j, il existe une suite unique $B_i = B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m} = B_j$ telle que $\sigma(G) = \sigma(B_{i_1} \mathbin{S} B_{i_2} \mathbin{S} \ldots\ldots \mathbin{S} B_{i_m})$.

En effet, il existe une suite unique $B_i = B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots\ldots, B_{i_m} = B_j$ telle que
- $\forall k \in \{1, \ldots\ldots, m-1\}$, B_k et B_{k+1} aient un sommet commun x_k.

(cf. fig. 21)

- $\forall k \in \{1, \ldots\ldots, m-1\}$, x_k soit un point d'articulation de G.

Alors, toutes les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de G sont contenues dans le graphe $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots\ldots \cup B_{i_m}$, ce qui implique

$\sigma(G) = \sigma(B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots\ldots \cup B_{i_m})$.

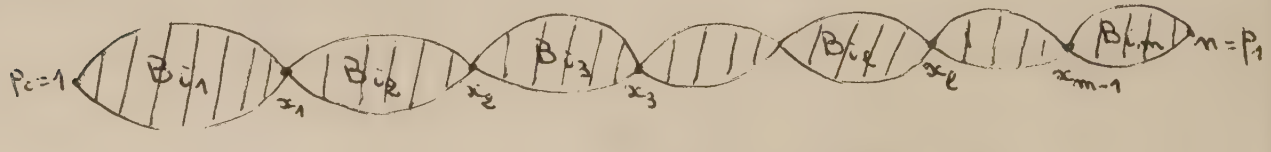


Fig. 21

On peut remarquer que $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots\ldots \cup B_{i_m}$ est le résultat de la connexion en série de $B_{i_1}, \ldots\ldots, B_{i_m}$ et avec les notations du Chapitre I,

$$B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_m} = B_{i_1} \underset{(p_o, x_1, x_2)}{S} B_{i_2} \underset{(x_1, x_2, x_3)}{S} \ldots\ldots B_{i_k} \underset{(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})}{S} B_{i_{k+1}} \ldots \underset{(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m)}{S} B_{i_m}$$

Proposition 2 - Considérons un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de G.

Supposons que l'on puisse appliquer à G l'opération 1) et l'opération 2) de la page 22 . Soient G' (resp. G") le graphe obtenu par application de l'opération 1) (resp. 2)) à G. Nous avons $\sigma(G) = \sigma(G') = \sigma(G")$.

Proposition 3 - Considérons 2 graphes G_1 et G_2 d'invariants respectifs σ_1 et σ_2.

1 - Soit G la connexion en parallèle de G_1 et de G_2, alors

$$\sigma(G) = \sigma(G_1 \underset{(p_o, p_1)}{P} G_2) = \max(\sigma_1, \sigma_2).$$

2 - Soit G' la connexion en série de G_1 et de G_2, alors

$$\sigma(G') = \sigma(G_1 \; S \; G_2) = \sigma_1 \, \sigma_2.$$

Démonstration -

1 - Soit $\mathcal{C}_1$ un recouvrement de G_1 par σ_1 éléments et $\mathcal{C}_2$ un recouvrement de G_2 par σ_2 éléments, $\sigma_1 \geq \sigma_2$; à tout élément C_2 de $\mathcal{C}_2$ nous pouvons faire correspondre un élément C_1 de $\mathcal{C}_1$ et ainsi associer à C_2 le graphe $C = C_2 \cup C_1 = C_2 \; P \; C_1$. C est SP (P_o, P_1). Les graphes C étant ainsi formés et les éléments C_1 de $\mathcal{C}_1$, non utilisés dans la construction de ces graphes, forment un recouvrement de cardinal $\sigma_1 = \sup(\sigma_1, \sigma_2)$, ce qui implique $\sigma(G_1 \; P \; G_2) = \sup(\sigma_1, \sigma_2)$.

Supposons que l'on ait un recouvrement de cardinal $k < \sup(\sigma_1, \sigma_2)$ de G et $\sigma_2 \leq \sigma_1$; la trace de ce recouvrement sur G_1 est alors un recouvrement de G_1 de cardinal au plus égal à k ($k < \sigma_1$), ce qui est impossible ; donc $\sigma(G_1 \; P \; G_2) = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

2 - Soit x le point d'articulation commun à G_1 et à G_2 ; $G' = G_1 \underset{(p_o, x, p_1)}{S} G_2$.

L'ensemble des chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de G peut être considéré comme le produit cartésien de l'ensemble des chaînes élémentaires $P_o - x$ de G_1

et de l'ensemble des chaînes élémentaires $x - P_1$ de G_2. Par suite, si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des recouvrements de G_1 et G_2 de cardinaux respectifs σ_1 et σ_2, alors $\{C_1 \underset{(p_o,x,p_1)}{S} C_2 \ / \ C_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ et } C_2 \in \mathcal{C}_2\}$ forme un recouvrement de G' de cardinal $\sigma_1 \sigma_2$, ce qui implique $\sigma(G') \leq \sigma_1 \sigma_2$. S'il existait un recouvrement de G' de cardinal $\mu < \sigma_1 \sigma_2$, il aurait pour traces sur G_1 et G_2 des recouvrements de cardinaux s_1 et s_2 vérifiant $\mu = s_1 s_2 < \sigma_1 \sigma_2$, ce qui impliquerait $s_1 < \sigma_1$ ou $s_2 < \sigma_2$; c'est impossible et donc $\sigma(G') = \sigma_1 \sigma_2$.

Proposition 4 - Etant donné un graphe G, si nous désignons par $\omega(G)$ le cardinal d'une clique maximale de G, nous avons évidemment $\sigma(G) \geq (\omega(G)-2)!$.

Proposition 5 - Pour toute arête e d'un graphe G nous avons

$$\sigma(G - \{e\}) \leq \sigma(G)$$

Démonstration - Considérons un recouvrement $\mathcal{C}$ de G de cardinal $\sigma(G)$ et la famille $\{C - \{e\} \ / \ C \in \mathcal{C}\}$. Si $G - \{e\}$ possède des sommets isolés, ceux-ci n'interviennent pas dans la détermination de $\sigma(G- \{e\})$. Tout élément C de $\mathcal{C}$ est SP (P_o, P_1), par suite toute arête $[a, b]$ de C vérifie dans ce graphe la propriété caractéristique d'ELGOT et WRIGHT : aLb ou (exclusif) bLa. Par suite, dans le graphe $C - \{e\}$ toute arête $[a, b]$ vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1) a L b ou (exclusif) b L a.

2) non (a L b) et non (b L a).

Appelons C_e le graphe obtenu à partir de $C - \{e\}$ en supprimant toutes les arêtes $[a, b]$ de ce graphe qui y vérifient non (a L b) et non (b L a). Si $E(C_e)$ est non vide, d'après sa définition C_e vérifie la propriété caractéristique d'ELGOT et WRIGHT, donc C_e est SP (P_o, P_1). Supposons que dans le graphe $C - \{e\}$ une arête $[a, b]$ vérifie non (a L b) et non (b L a) ; toute chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de C contenant $[a, b]$ contient alors e. Considérons la famille $\mathcal{C}_e = \{C_e \ / \ C \in \mathcal{C}, E(C_e) \neq \emptyset\}$; $|\mathcal{C}_e| \leq |\mathcal{C}|$. Soit μ une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de $G - \{e\}$, c'est-à-dire une chaîne élémentaire $P_o - P_1$ de G qui ne contienne pas e et soit C un graphe de G qui contienne μ ; alors μ est incluse dans C_e et $E(C_e)$ est non vide. $\mathcal{C}_e$ forme donc un recouvrement de

$G - \{e\}$, d'où $\sigma(G - \{e\}) \leq |\mathcal{C}_e| \leq |\mathcal{C}| = \sigma = \sigma(G)$

Proposition 6 - Soit G_e le sous-graphe partiel de G formé de toutes les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de ce graphe qui contiennent e. Alors G_e SP (P_o, P_1) implique que $\sigma(G - \{e\})$ soit égal à $\sigma(G) - 1$ ou à $\sigma(G)$.

Démonstration - Supposons $\sigma(G - \{e\}) \leq \sigma(G) - 2$.

Considérons un recouvrement $\mathcal{C}$ de $G - \{e\}$ de cardinal $\sigma(G - \{e\})$. La famille $\mathcal{C} \cup \{G_e\}$ forme un recouvrement de G de cardinal $\sigma(G - \{e\}) + 1 \leq \sigma(G) - 1$. C'est impossible. $\mathcal{C} \cup \{G_e\}$ forme bien un recouvrement de G puisque $\mathcal{C}$ couvre les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de G qui ne contiennent pas e et que G_e couvre les chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de G qui contiennent e.

Définition -
==========

Nous dirons qu'un graphe G est σ - critique si et seulement si $\forall e \in E(G)$, $\sigma(G - \{e\}) < \sigma(G)$.

P_o et P_1 étant deux sommets de G nous préciserons davantage quand cela sera nécessaire, en disant que G est σ - critique relativement à P_o et P_1 ; cela signifie que $\sigma(G)$ désigne le cardinal minimum d'un recouvrement des chaînes élémentaires $P_o - P_1$ de G et que, de plus, pour tout e de E (G), nous avons $\sigma(G - \{e\}) < \sigma(G)$.

Propriétés - Soit G un graphe σ - critique et P_o, P_1 deux de ses sommets.

Désignons par $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les blocs de G ; B_i est un bloc contenant P_o, B_j un bloc contenant P_1.

1) $i = j$. Considérons alors un entier k distinct de i et un élément e de $E(B_k)$. Nous savons que $\sigma(G) = \sigma(B_i)$; comme G est critique nous avons $\sigma(G - \{e\}) < \sigma(G)$; de plus, $B_i \subset G - \{e\}$ implique $\sigma(B_i) \leq \sigma(G - \{e\})$ et donc $\sigma(G - \{e\}) < \sigma(G) = \sigma(B_i) \leq \sigma(G - \{e\})$. C'est impossible. Donc $\forall k \neq i$, $E(B_k) = \emptyset$. Puisqu'on ne s'occupe pas des sommets isolés quand on étudie l'invariant d'un graphe, nous pouvons dire que $G = B_i$ à des sommets isolés près.

2) $i \neq j$. Il existe une suite unique $B_i = B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m} = B_j$ telle que pour tout k de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$, B_{i_k} et $B_{i_{k+1}}$ aient un sommet commun x_k qui soit un point d'articulation de G. Nous avons vu que

$$\sigma(G) = \sigma(B_{i_1} (p_o, x_1, x_2) B_{i_2} S (x_1, x_2, x_3) B_{i_k} S B_{i_{k+1}} \ldots\ldots (x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) B_{i_m})$$

$$= \sigma(B_{i_1}) . \sigma(B_{i_2}) \ldots\ldots \sigma(B_{i_k}) . \sigma(B_{i_{k+1}}) . \sigma(B_{i_m})$$

ceci implique que :

$k \neq i_1, i_2, \ldots, i_m$, $E(B_k) \neq \emptyset$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, en enlevant une arête e de B_k, on aurait $\sigma(G - \{e\}) = \sigma(G)$, ce qui est impossible puisque G est σ critique.

Donc, $G = B_{i_1} (p_o, x_1, x_2) B_{i_2} \ldots\ldots B_{i_m}$ à des sommets isolés près.

3) Si G est la connexion en série de deux graphes G_1 et G_2, $\sigma(G) = \sigma(G_1) . \sigma(G_2)$ et par suite G est σ - critique si et seulement si G_1 et G_2 le sont.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des trois propriétés précédentes.

Proposition 7 - G est σ - critique si et seulement si G est la connexion en série de n graphes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ (ce que nous notons $G = G_1 S G_2 S \ldots S G_n$), tels que

1) n soit supérieur ou égal à 1.

2) Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, G_i soit un bloc de G σ - critique par rapport aux sommets x_i et x_{i+1} (ces deux sommets sont respectivement les sommets communs à G_{i-1} et G_i et à G_i et G_{i+1}).

Proposition 8 - Si un graphe G est σ - critique relativement à deux sommets P_o et P_1, alors $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation de G.

En effet, si $\{P_o, P_1\}$ était ensemble d'articulation on pourrait écrire G sous la forme d'une connexion en parallèle $G = G_1 \,{}_{(P_o,P_1)}P\, G_2$ ce qui implique $\sigma(G) = \max(\sigma(G_1), \sigma(G_2))$. Si $\sigma(G_1) \geq \sigma(G_2)$ (même raisonnement si $\sigma(G_2) \geq \sigma(G_1)$), en supprimant une arête e de G_2, on a :
$\sigma(G - \{e\}) = \max(\sigma(G_1), \sigma(G_2 - \{e\})) = \sigma(G_1) = \max(\sigma(G_1), \sigma(G_2)) = \sigma(G)$,
ce qui est impossible puisque G est σ - critique.

Corollaire - Soit G un graphe σ - critique relativement à deux sommets P_o et P_1. Si $G - \{[P_o, P_1]\}$ contient une chaîne élémentaire $P_o - P_1$, alors $[P_o, P_1] \notin E(G)$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$G = [P_o, P_1] \,{}_{(P_o,P_1)}P\, (G - \{[P_o, P_1]\}) \Rightarrow \sigma(G - \{[P_o, P_1]\}) = \sigma(G),$$

ce qui contredit le fait que G soit σ - critique.

Définition - On dira que G est n - σ - critique si et seulement si G est σ - critique et $\sigma(G) = n$.

Remarque - Un graphe 1 - σ - critique est un graphe qui, à des sommets isolés près, est une chaîne élémentaire $P_o - P_1$. C'est donc un graphe homéomorphe à K_2.

CARACTERISATION DES GRAPHES 2 - σ - CRITIQUES -

Considérons un graphe G 2 - σ - critique qui soit un bloc. Notre but est de caractériser G.

Puisque $\sigma(G) = 2$, G est différent de K_2 ; comme, de plus, nous supposons que G soit un bloc, G doit être 2 - connexe. G étant 2-connexe, il existe dans ce graphe un cycle élémentaire contenant P_o et P_1, c'est-à-dire qu'il existe deux chaînes élémentaires γ_1 et γ_2 disjointes (sauf en leurs extrémités) d'extrémités P_o et P_1.

$[P_o, P_1] \notin E(G)$ implique que γ_1 et γ_2 soient de longueur au moins 2

$\{P_o, P_1\}$ n'étant pas ensemble d'articulation de G, il existe une chaîne élémentaire γ de ce graphe ayant pour extrémités un sommet intérieur x de γ_1 et un sommet intérieur y de γ_2, cette chaîne étant telle qu'aucun de ses sommets intérieurs n'appartienne à $\gamma_1 \cup \gamma_2$. G contient donc un sous-graphe partiel $H = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ homéomorphe au graphe $\bar{H}$ de la figure 22.

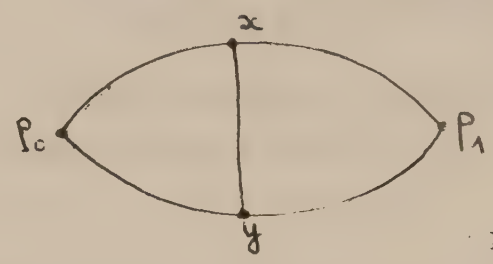


Fig. 22

Supposons qu'il existe dans G une deuxième chaîne élémentaire $\gamma' \neq \gamma$ joignant γ_1 à γ_2, alors la suppression d'une arête e de $E(\gamma') - E(\gamma)$ créerait un graphe $G - \{e\}$ vérifiant $\sigma(G - \{e\}) \geq \sigma(H) = \sigma(\bar{H}) = 2$, ce qui contredit le fait que G soit $2 - \sigma$ - critique.

D'une manière générale supposons qu'il existe dans G une arête e de E (H), alors la suppression de e crée un graphe $G - \{e\}$ contenant H ; ceci implique $\sigma(G - \{e\}) \geq \sigma(H) = 2$, ce qui contredit le fait que G soit $2 - \sigma$ - critique.

Donc, à des sommets isolés près, G = H.

Proposition 9 - A des sommets isolés près, tout bloc $2 - \sigma$ - critique est homéomorphe au graphe $\bar{H}$ de la figure 23.

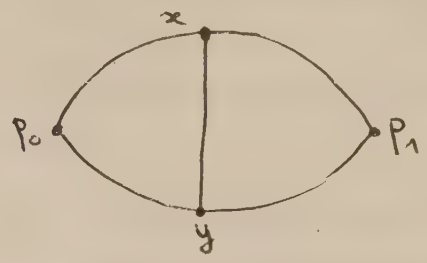
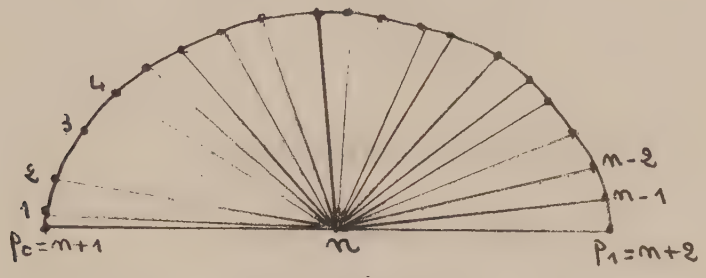


Fig. 23

Utilisant la proposition 7 de la page 116, puisque G est σ - critique, nous pouvons écrire $G = G_1 \, S \, G_2 \, S \ldots\ldots S \, G_n$, et $\sigma(G) = \sigma(G_1) \cdot \sigma(G_2) \ldots \sigma(G_n)$. $\sigma(G) = 2$ implique alors qu'il existe un indice i_o tel que $\sigma(G_{i_o}) = 2$ et pour tout $i \neq i_o$, $\sigma(G_i) = 1$. Nous en déduisons la proposition suivante.

Proposition 10 - Tout graphe 2 - σ - critique est la connexion en série d'un graphe homéomorphe à $\bar{H}$ (fig. 23) et d'un nombre quelconque de graphes SP.

Nous considérons comme question ouverte la caractérisation des graphes n - σ - critiques pour n > 2. Toutefois, pour tout n, il existe des graphes n - σ - critiques ; nous allons en effet démontrer que pour tout n > 1, le graphe Z_{n+2} (fig. 24) est n - σ - critique.



Z_{n+2}

n > 1

Fig. 24

Nous avons déjà démontré dans ce chapitre que $\sigma(Z_{n+2}) = n$. Montrons que Z_{n+2} est n - σ - critique. Enlevant une arête e de la chaîne extérieure de Z_{n+2}, nous obtenons un graphe $Z_{n+2} - \{e\}$ SP (P_o, P_1), et donc $\sigma(Z_{n+2} - \{e\}) = 1 < \sigma(Z_{n+2})$.

Enlevons un rayon e de Z_{n+2} ; $e \neq [n+1, n]$, $[n, n+2]$; soit n et i ses extrémités. Appliquant l'opération 2) de la page 23 à $Z_{n+2} - \{e\}$, nous supprimons le sommet i et obtenons un graphe isomorphe à Z_{n+1}. Nous avons donc $\sigma(Z_{n+2} - \{e\}) = \sigma(Z_{n+1}) = n-1 < n = \sigma(Z_{n+2})$.

Enlevons l'arête $e = [n+1, n]$ de Z_{n+2} (le raisonnement est le même si on enlève l'arête $[n, n+2]$) ; le graphe $Z_{n+2} - \{e\}$ obtenu est la connexion en série d'un graphe isomorphe à Z_{n+1} et du graphe K_2 avec $X(K_2) = \{1, n+1\}$.

Donc $Z_{n+2} - \{e\}) = \sigma(K_2) \cdot \sigma(Z_{n+1}) = \sigma(Z_{n+1}) = n-1 < n = \sigma(Z_{n+2})$.

Nous avons ainsi montré que le graphe Z_{n+2} de la figure 24 est n - σ - critique.

CHAPITRE VI

CARACTERISATION DES GRAPHES D'INVARIANT σ EGAL A 2

CARACTERISATION DE BLOCS D'INVARIANT σ EGAL A 2

Dans cette étude, nous nous limiterons à la caractérisation d'un graphe G possédant les propriétés suivantes :

- P_o et P_1 sont deux sommets de G.
- G est un bloc.
- $\sigma(G) = \sigma_{(P_o,P_1)}(G) = 2$
- G n'est pas la connection en parallèle de deux graphes relativement à P_o et P_1 (cela signifie que $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation de G).

REMARQUES FONDAMENTALES -

1 - $\sigma(G) = 2$ implique $|X(G)| \geq 3$; G n'étant pas la connection en parallèle de deux graphes relativement à P_o et P_1, l'arête $[P_o, P_1]$ n'appartient pas à E (G). G étant un bloc, il existe un cycle élémentaire de G contenant P_o et P_1 ; G contient donc deux chaînes élémentaires γ_1 et γ_2, disjointes (sauf en leurs extrémités), d'extrémités P_o et P_1. Puisque $[P_o, P_1]$ n'appartient pas à E (G), γ_1 et γ_2 sont de longueurs supérieures ou égales à 2.

2 - Puisque G n'est pas la connection en parallèle de deux graphes, il existe une chaîne élémentaire γ de G dont les extrémités soient un sommet intérieur à γ_1 (nous le noterons x) et un sommet intérieur à γ_2 (nous le noterons y) ; de plus, aucun point intérieur à γ n'appartient à $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Ces deux remarques nous permettent d'affirmer que G contient un sous-graphe partiel homéomorphe au graphe de la figure 1.

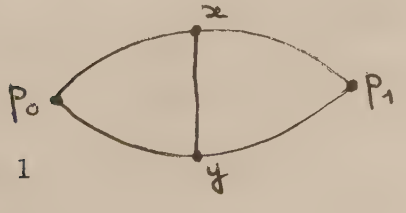


Fig. 1

Notations - Considérons une chaîne C de G.

- Nous noterons $\overset{\circ}{C}$ l'ensemble des sommets intérieurs à C (c'est-à-dire l'ensemble des sommets de C distincts de ses extrémités).

- a et b étant deux sommets de C, nous noterons $C_{[a,b]}$ la sous-chaîne de C d'extrémités a et b.

La caractérisation de G comporte cinq parties.

Dans la première partie, nous déterminerons les différents types de chaînes élémentaires que peut contenir le graphe G.

Dans la seconde, nous définirons n, cardinal minimum d'un ensemble de chaînes élémentaires disjointes de G, chacune de ces chaînes ayant pour extrémités un point intérieur à γ_1 et un point intérieur à γ_2. Nous montrerons que n ne peut prendre que deux valeurs 1 et 2.

La troisième (resp. quatrième) partie, sera consacrée à la caractérisation de G dans l'hypothèse où n est égal à 2 (resp. à 1).

La cinquième partie est une synthèse des quatre premières et nous conduit à l'énoncé du théorème de caractérisation.

- I - PREMIERE PARTIE -

Soit H le graphe constitué de γ_1, γ_2 et γ ; $H = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$.

Soit μ une chaîne élémentaire de G dont les extrémités u et v sont des sommets de H et dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à H.

Posons $\gamma_1' = \gamma_1\ [P_o, x]$ $\quad \gamma_1'' = \gamma_1\ [x, P_1]$

$\gamma_2' = \gamma_2\ [P_o, y]$ $\quad \gamma_2'' = \gamma_2\ [y, P_1]$

$H' = H \cup \mu$

Nous allons étudier les différentes positions que peuvent prendre u et v. Remarquons que ces deux sommets jouent des rôles symétriques. Nous distinguerons dix cas, l'exhaustivité étant assurée par le tableau de la page 136. L'étude des cinq premiers cas exclut certaines positions que pourraient prendre u et v en établissant des incompatibilités entre celles-ci et le fait que $\sigma(G)$ soit égal à 2. En revanche, l'étude des cinq derniers cas nous indique quelles sont les positions possibles de u et v, compatibles avec la propriété $\sigma(G) = 2$.

Le tableau de la page 136 résume les résultats de l'étude de ces dix cas et nous assure que toutes les positions ont été envisagées.

1) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}_1'$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}_1''$ -

Le graphe H' (fig. 2) est un sous-graphe partiel de G contenant H, ce qui implique $2 = \sigma(H) \leq \sigma(H') \leq \sigma(G)=2$ et donc $\sigma(H') = 2$. Un recouvrement de cardinal 2 de H' doit recouvrir H, puisque H est un sous-graphe partiel de H'. Pour H nous avons deux recouvrements de cardinal 2 possibles $\{H_1, H_2\}$ et $\{H_3, H_4\}$

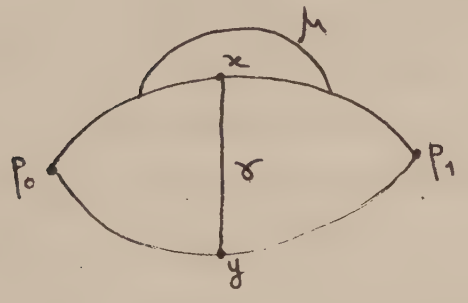


Fig. 2

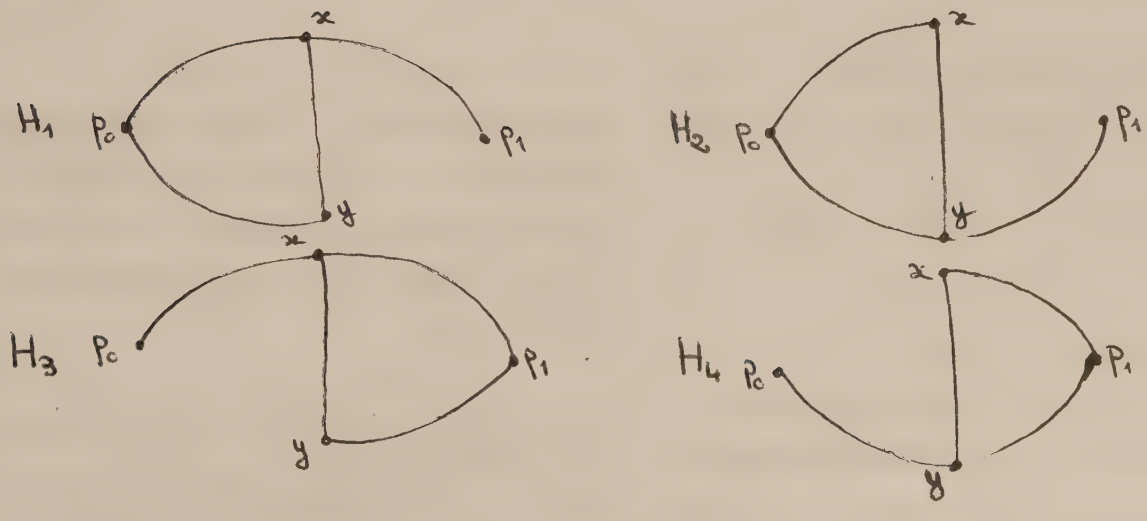


Fig. 3

Si $\{H'_1, H'_2\}$ est un recouvrement de H', il existe des indices i et j, éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4} et tels que H_i soit inclus dans H'_1 et H_j dans H'_2.

Si, à chacun des quatre graphes H_1, H_2, H_3, H_4, nous adjoignons la chaîne $\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma_2[v,p_1]$ de H', nous obtenons les graphes de la figure 4.

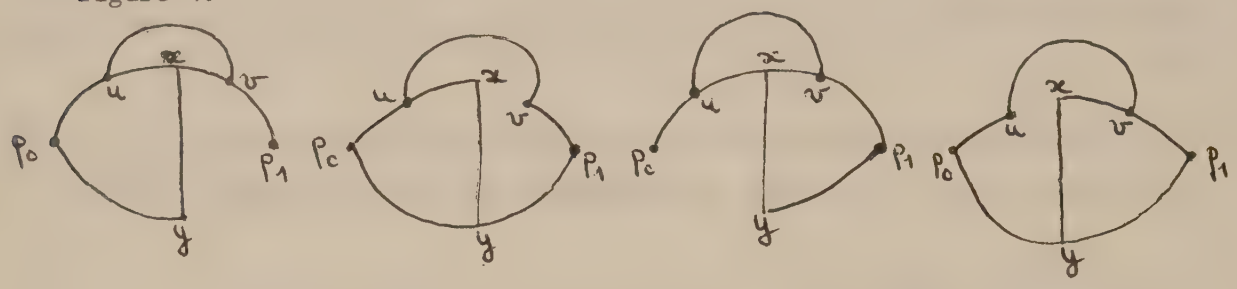


Fig. 4

Ces graphes ne sont pas SP (P_o, P_1), or, H'_1 et H'_2 le sont. Nous en déduisons que $H_i \cup (\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma_2[v,p_1])$ n'est pas inclus dans H'_1 et que $H_j \cup (\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma_2[v,p_1])$ n'est pas inclus dans H'_2. La chaîne $\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma_2[v,p_1]$ n'est donc contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui est impossible puisque, par hypothèse, H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'. L'hypothèse $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et $v \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_1$ est donc absurde, et μ ne peut avoir pour extrémités un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1$. De même μ ne peut avoir comme extrémités un sommet de γ'_2 et un sommet de γ''_2.

2) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et $v \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_2$ -

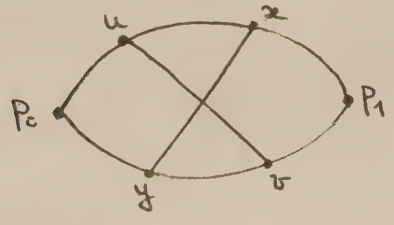


Fig. 5

Le graphe H' (fig. 5) est un sous-graphe partiel de G et, ici encore, $\sigma(H') = 2$. Un recouvrement de cardinal 2 de H' doit recouvrir H puisque H est un sous-graphe partiel de H'.

Si, aux graphes H_1, H_2, H_3, H_4, constituant les deux recouvrements possibles de H, nous adjoignons la chaîne élémentaire $\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma_2[v,p_1]$, nous obtenons les graphes de la figure 6.

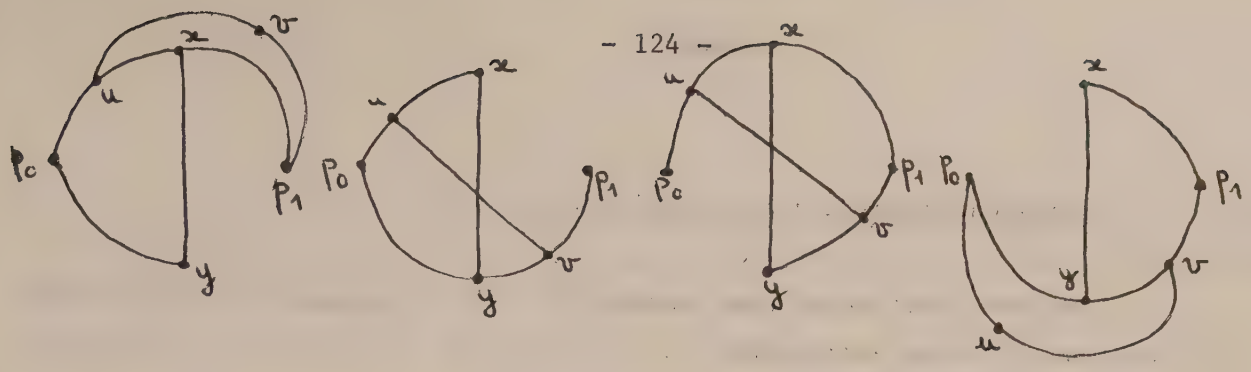


Fig. 6

Rappelons la condition nécessaire et suffisante établie par ELGOT et WRIGHT :

Un graphe G est SP (P_o, P_1) si et seulement si toute arête $[a, b]$ de E (G) possède une (et une seule) des deux propriétés suivantes :

- il existe une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1, contenant $[a, b]$ et telle que, lorsqu'on la parcourt de P_o vers P_1, on rencontre a avant b.
- il existe une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1, contenant $[a, b]$ et telle que, lorsqu'on la parcourt de P_o vers P_1, on rencontre b avant a.

Dans le premier et le second (resp. le troisième et le quatrième) graphe de la figure 6, les arêtes de γ_1 $[u, x]$ (resp. γ_2 $[v, y]$) ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Par suite, aucun des graphes de la figure 6 n'est SP (P_o, P_1).

Raisonnant comme dans le premier cas, nous aboutissons, ici encore, à une impossibilité.

μ ne peut donc avoir pour extrémités un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}''_2$. De même, un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_2$ ne peuvent être extrémité de μ.

3) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$, $v = y$ -

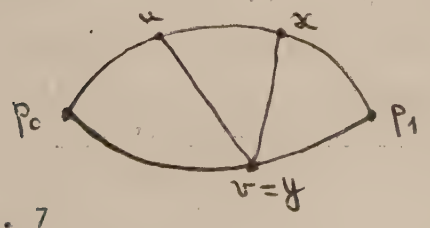


Fig. 7

H' (figure 7) est un sous-graphe partiel de G et $\sigma(H') = 2$. H' est homéomorphe à l'un des graphes étudiés pages 106 et 107 ; nous savons donc que $\sigma(H') = |X(H')| - 2 = 3 \neq 2$

Nous aboutissons à une contradiction.

μ ne peut donc avoir pour extrémités y et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_1$; de même, μ ne peut avoir comme extrémités y et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}''_1$, ni x et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_2$, ni x et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}''_2$.

4) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}'_1$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$ -

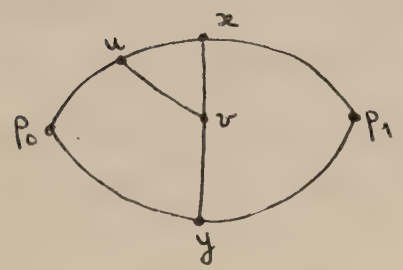


Fig. 8

Ici encore, H' (fig. 8) est un sous-graphe de G d'invariant $\sigma(H')$ égal à 2. Nous considérons les quatre graphes H_1, H_2, H_3 et H_4 constituant les deux recouvrements de cardinal 2 possibles de G.

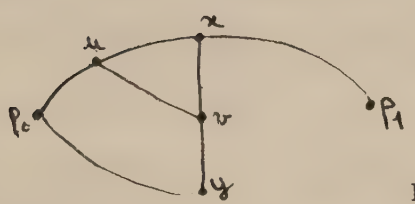
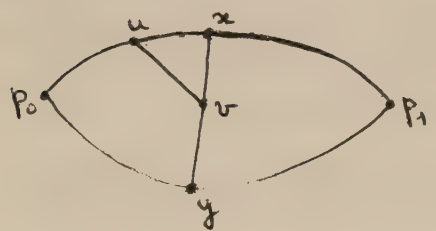


Fig. 9

Si l'on adjoint la chaîne élémentaire $\gamma_1[P_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,P_1]$ à chacun des deux graphes H_1 et H_2, on obtient les deux graphes de la figure 9.



Dans chacun d'eux, les arêtes de μ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Aucun de ces graphes n'est donc SP (P_o, P_1).

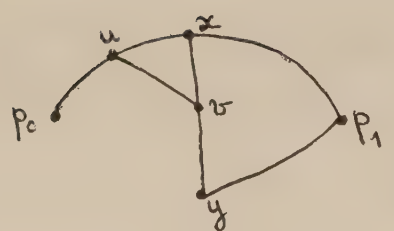
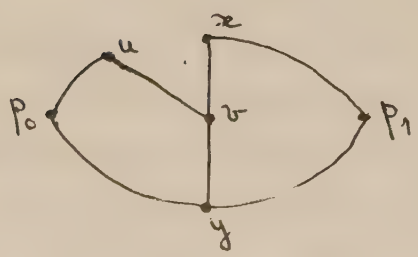


Fig. 10

Si l'on adjoint la chaîne élémentaire $\gamma_1[P_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma[v,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ à chacun des deux graphes H_3 et H_4, on obtient les deux graphes de la figure 10. Dans chacun d'eux, les arêtes de $\gamma[x,v]$ dans le premier, et celles de $\gamma[v,y]$ dans le second ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Aucun de ces graphes n'est donc SP(P_o,P_1).



H est un sous-graphe partiel de H' et $\sigma(H) = \sigma(H') = 2$. Par suite, tout recouvrement de H' par deux graphes SP (P_o, P_1) est de l'une des deux formes suivantes :

1. $\{H'_1, H'_2\}$ avec $H_1 \subset H'_1$, $H_2 \subset H'_2$.

Mais alors, ce qui précède implique que la chaîne $\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ ne soit contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'.

2. $\{H'_1, H'_2\}$ avec $H_3 \subset H'_1$, $H_4 \subset H'_2$.

Mais alors, ce qui précède implique que la chaîne $\gamma_1[p_o,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma[v,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ ne soit contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'.

Dans les deux cas nous aboutissons à une contradiction ; nous en déduisons que μ ne peut avoir pour extrémités un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$. De même nous démontrerions que μ ne peut avoir pour extrémités un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}''_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$, ni un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_2$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$, ni un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}''_2$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$.

5) - $u = P_o$, $v = P_1$ -

μ est alors une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1, disjointes de γ_1 et de γ_2 (sauf en ses extrémités). Puisque G n'est pas la connection en parallèle de deux graphes, il existe dans G une chaîne élémentaire μ' dont les extrémités sont un sommet s intérieur à μ et un sommet t de H distinct de P_o et de P_1 ; les sommets intérieurs à μ' n'appartiennent ni à H ni à μ . Soit, alors H", le graphe constitué de H, μ et μ' ; $H'' = H' \cup \mu'$. H" étant un sous-graphe partiel de G qui contient H', nous avons $2 = \sigma(H') \leq \sigma(H'') \leq \sigma(G) = 2$ et donc $\sigma(H'') = 2$.

Nous distinguons deux cas de figure possibles pour H" selon la position de t dans H.

1er cas : $t \in \gamma$. Considérons un recouvrement de H" par deux graphes $SP(P_o,P_1)$.

Devant recouvrir le sous-graphe partiel H de H", ce recouvrement est de l'une des deux formes suivantes :

- $\{H''_1, H''_2\}$ avec $H_1 \subset H''_1$, $H_2 \subset H''_2$
- $\{H''_1, H''_2\}$ avec $H_3 \subset H''_1$, $H_4 \subset H''_4$

- Si le recouvrement $\{H''_1, H''_2\}$ de H" est de la première forme, adjoignons la chaîne élémentaire $\mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,P_1]$ de H" au graphe H_2. Les arêtes de γ dans le graphe $H_2 \cup \mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,P_1]$ (Fig. 11) ainsi obtenu ne vérifient plus la condition nécessaire et suffisante D'ELGOT et WRIGHT ; ce graphe n'est donc pas $SP(P_o, P_1)$.

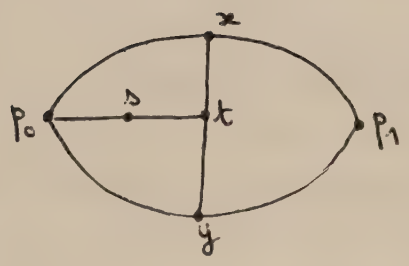


Fig. 11

Comme H''_2 est $SP(P_o, P_1)$ et contient H_2, nous en déduisons que H''_2 ne contient pas la chaîne $\mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,P_1]$ de H". $\{H''_1, H''_2\}$ étant un recouvrement de H", cette chaîne est alors contenue dans H''_1. H''_1 contient donc le graphe $G_1 = H_1 \cup \mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,P_1]$ (Fig. 12).

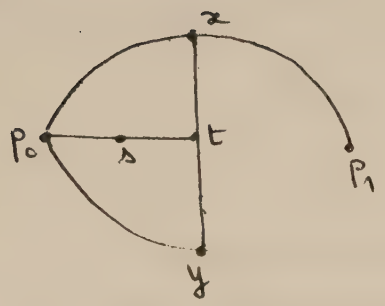


Fig. 12

De même adjoignons la chaîne élémentaire $\mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,y] \cup \gamma_2[y,P_1]$ de H" au graphe H_1. Les arêtes de γ dans le graphe $H_1 \cup \mu[P_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,y] \cup \gamma_2[y,P_1]$ (Fig. 13) ainsi obtenu ne vérifient plus la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Nous en déduisons que H''_2 contient

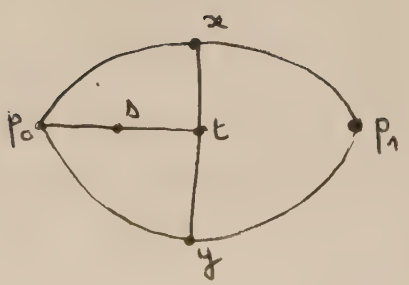


Fig. 13

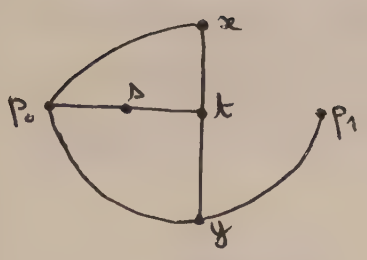


Figure 14

le graphe $G_2 = H_2 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ (Figure 14).

Adjoignons la chaîne élémentaire μ de H" à chacun des deux graphes G_1 et G_2. Nous obtenons les deux graphes de la figure 15.

Sur cette figure les arêtes de G_1 et de G_2 sont dessinées en trait continu ; les arêtes de μ qui n'appartiennent ni à G_1 ni à G_2 le sont en pointillé.

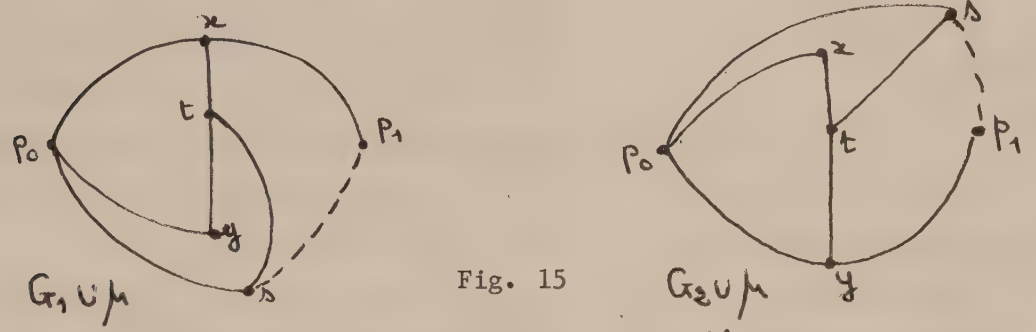


Fig. 15

Dans chacun des graphes $G_1 \cup \mu$ et $G_2 \cup \mu$, les arêtes de μ' ne vérifient pas la condition nécessaire d'ELGOT et WRIGHT ; ces graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1). Comme H_1'' et H_2'' sont SP (P_o, P_1) et contiennent respectivement G_1 et G_2, nous en déduisons que la chaîne μ de H" n'est contenue ni dans H_1'' ni dans H_2'', ce qui contredit le fait que H_1'' et H_2'' forment un recouvrement de H".

. Si le recouvrement $\{H_1'', H_2''\}$ de H" est de la seconde forme distinguons deux cas.

1) - $t \neq x \neq y$

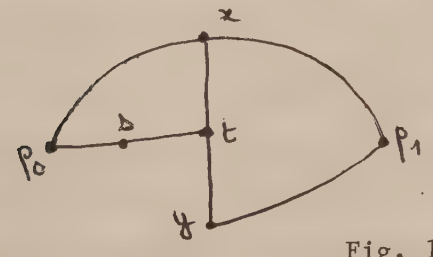


Fig. 16

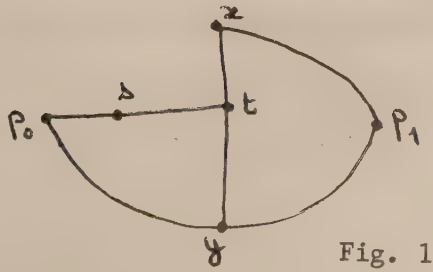


Fig. 17

Adjoignons à H_3 et H_4 la chaîne $\mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H". Les arêtes de $\gamma[t,x]$ dans le graphe $H_3 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ (Fig. 16) et celles de $\gamma[t,y]$ dans le graphe $H_4 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ (Fig. 17) ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Ces deux graphes ne sont donc

pas SP (P_o, P_1). H''_1 et H''_2 contenant respectivement H_3 et H_4, nous en déduisons que la chaîne $\mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H" n'est contenue ni dans H''_1 ni dans H''_2, ce qui contredit le fait que H''_1 et H''_2 forment un recouvrement de H".

2)- t = x (raisonnement analogue si t = y) -

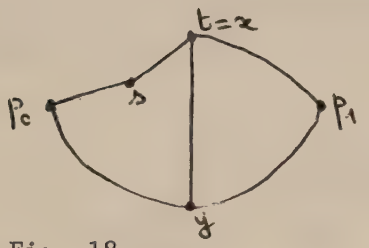


Fig. 18

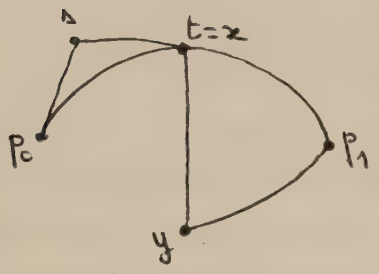


Fig. 19

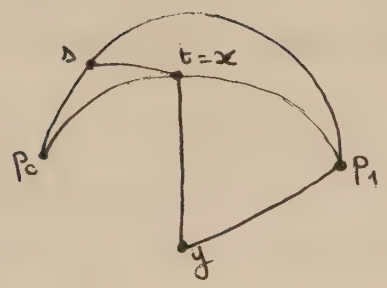


Fig. 20

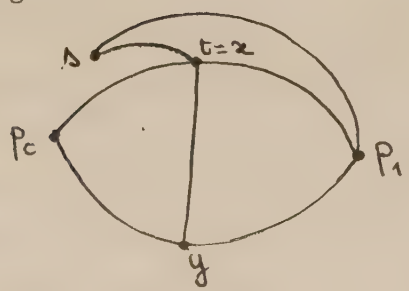


Fig. 21

Adjoignons à H_4 la chaîne élémentaire $\mu[p_o,s] \cup \mu'[s,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H". Les arêtes de γ dans le graphe $H_4 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ obtenu (fig. 18) ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Ce graphe n'est donc pas SP (P_o,P_1) ; nous en déduisons que la chaîne $\mu[p_o,s] \cup \mu'[s,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ n'est pas contenue dans H''_2 - $\{H''_1, H''_2\}$ étant un recouvrement de H", cette chaîne est donc contenue dans H''_1 et H''_1 contient le graphe $G_1 = H_3 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ (fig. 19).

Adjoignons la chaîne élémentaire $\gamma_1[p_o,x] \cup \mu'[x,s] \cup \mu[s,p_1]$ de H" à G_1 et à H_4. Les arêtes de μ' dans le graphe $G_1 \cup \gamma_1[p_o,x] \cup \mu'[x,s] \cup \mu[s,p_1]$ (Fig. 20) et celles de γ dans $H_4 \cup \gamma_1[p_o,x] \cup \mu'[x,s] \cup \mu[s,p_1]$ (fig. 21) ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o,P_1). H''_1 et H''_2 contenant respectivement G_1 et H_4, nous en déduisons que la chaîne

$\gamma_1[p_o,x] \cup \mu'[x,s] \cup \mu[s,p_1]$ de H" n'est contenue ni dans H_1'' ni dans H_2'', ce qui contredit le fait que H_1'' et H_2'' forment un recouvrement de H".

Nous déduisons de cette étude que t ne peut appartenir à γ.

2ème cas : $t \in \mathring{\gamma}_1'$ (raisonnement analogue si t appartient à $\mathring{\gamma}_1''$, $\mathring{\gamma}_2'$, $\mathring{\gamma}_2''$) -

Ici, encore, considérons un recouvrement $\{H_1'', H_2''\}$ de H" par deux graphes SP (P_o, P_1). Devant recouvrir le sous-graphe partiel H de H", ce recouvrement vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- $H_1 \subset H_1''$ et $H_2 \subset H_2''$
- $H_3 \subset H_1''$ et $H_4 \subset H_2''$
- Si H_1'' contient H_1 et H_2'' contient H_2, adjoignons la chaîne élémentaire $\gamma_1[p_o,t] \cup \mu'[t,s] \cup \mu[s,p_1]$ de H" aux graphes H_1 et H_2. Dans les deux graphes ainsi obtenus (fig. 22) les arêtes de $\gamma_1[t,x]$ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Ces deux graphes ne sont pas SP (P_o, P_1). Puisque H_1'' et H_2'' contiennent respectivement H_1 et H_2, nous en déduisons que la chaîne $\gamma_1[p_o,t] \cup \mu'[t,s] \cup \mu[s,p_1]$ de H" n'est contenue ni dans H_1'' ni dans H_2'', ce qui contredit le fait que H_1'' et H_2'' forment un recouvrement de H".

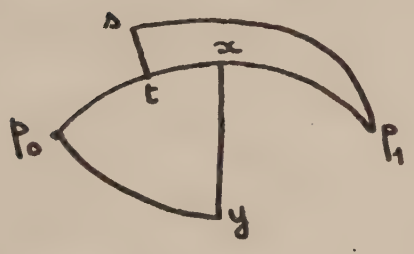
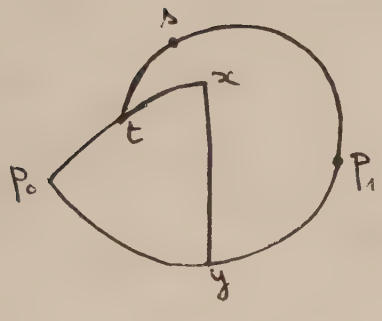


Fig. 22



- Si H_1'' contient H_3 et H_2'' contient H_4, adjoignons à H_3 la chaîne élémentaire $\gamma_2[p_o,y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,t] \cup \mu'[t,s] \cup \mu[s,p_1]$ de H". Dans le graphe obtenu (Fig. 23) les arêtes de γ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Nous en déduisons que cette chaîne de H" n'est pas contenue dans H_1''.

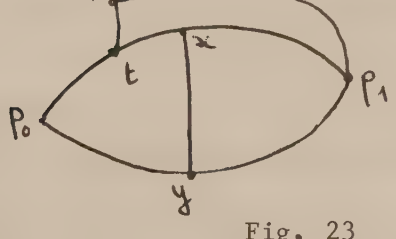


Fig. 23

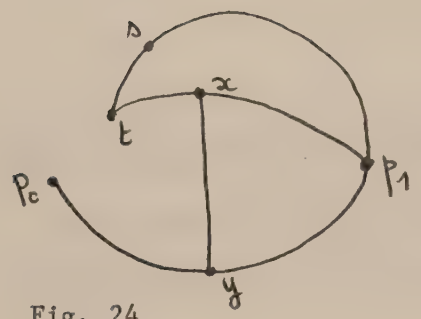


Fig. 24

$\{H_1'', H_2''\}$ étant un recouvrement de H'', H_2'' contient alors le graphe

$G_2 = H_4 \cup \gamma_2[p_o,y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,t] \cup \mu'[t,s] \cup \mu[s,p_1]$ (Fig. 24)

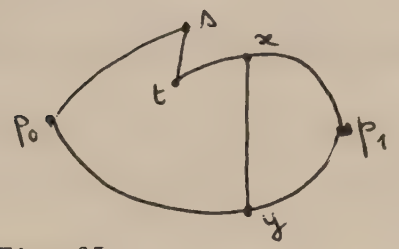


Fig. 25

De même, adjoignons à H_4 la chaîne élémentaire $\mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma_1[t,p_1]$ de H''. Dans le graphe obtenu (Fig. 25) les arêtes de γ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Nous en déduisons que cette chaîne de H'' n'est pas contenue dans H_2'' ; H_1'' contient alors le graphe

$G_1 = H_3 \cup \mu[p_o,s] \cup \mu'[s,t] \cup \gamma_1[t,p_1]$ (Fig. 26).

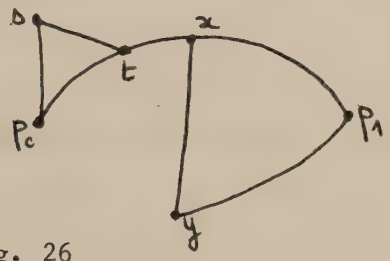


Fig. 26

Adjoignons la chaîne élémentaire μ de H'' à chacun des deux graphes G_1 et G_2. Nous obtenons les deux graphes de la figure 27. Sur cette figure, les arêtes de G_1 et de G_2 sont dessinées en trait continu ; les arêtes de μ qui n'appartiennent ni à G_1 ni à G_2 le sont en pointillé.

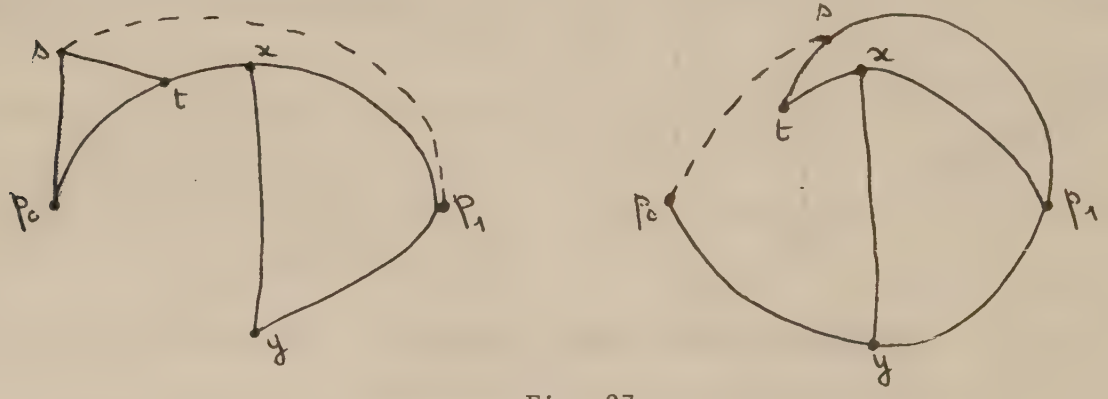


Fig. 27

Dans chacun des graphes $G_1 \cup \mu$ et $G_2 \cup \mu$, les arêtes de μ' ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; ces graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1). Comme H_1'' et H_2'' contiennent respectivement G_1 et G_2, nous en déduisons que la chaîne μ de H'' n'est contenue ni dans H_1'' ni dans H_2'',

ce qui contredit le fait que H''_1 et H''_2 forment un recouvrement de H".

Nous déduisons de cette étude que t ne peut appartenir à $\overset{\circ}{\gamma}'_1$. De même, il ne peut appartenir ni à $\overset{\circ}{\gamma}''_1$, ni à $\overset{\circ}{\gamma}'_2$, ni à $\overset{\circ}{\gamma}''_2$.

Comme nous avons vu, précédemment, que t ne peut appartenir à γ , ceci contredit le fait que t soit un sommet de H distinct de P_o et de P_1.

Nous en déduisons que μ ne peut avoir pour extrémités les sommets P_o et P_1.

Comme nous l'avons annoncé, nous investiguons les cinq derniers cas. Nous montrerons que ceux-ci correspondent à des positions des sommets u et v compatibles avec la propriété $\sigma(G) = 2$.

6) - $u \in \gamma'_1$, $v \in \gamma'_1$ -

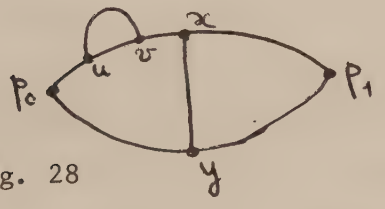


Fig. 28

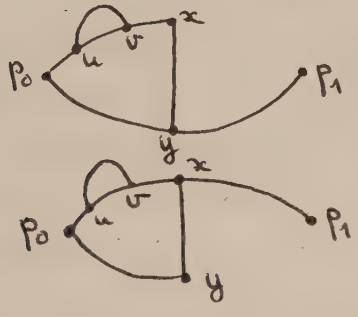


Fig. 29

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 28. $H \subset H'$ implique $\sigma(H') \geq \sigma(H) = 2$

Comme, en outre, H' possède un recouvrement formé des deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de la figure 29, nous en déduisons que $\sigma(H')$ est égal à 2. Dans l'hypothèse où u et v sont des sommets de γ'_1, $\sigma(H')$ est donc égal à 2. Comme il existe des graphes d'invariant égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses u, $v \in \gamma'_1$ d'une part, et $\sigma(G) = 2$ d'autre part, sont compatibles.

De même, nous démontrerions que l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ est compatible avec chacune des trois hypothèses suivantes : u, $v \in \gamma''_1$; u, $v \in \gamma'_2$; u, $v \in \gamma''_2$.

7) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}'_1$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}'_2$ -

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 30. H' possède un recou-

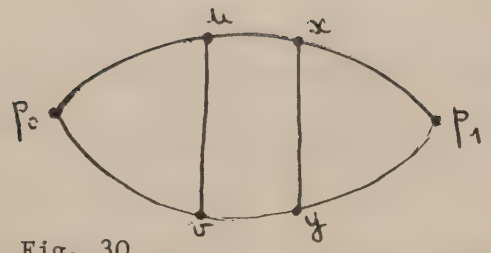
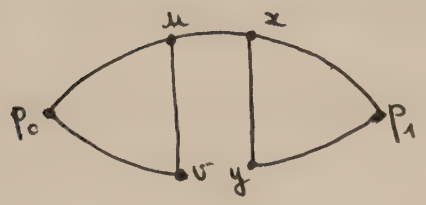


Fig. 30



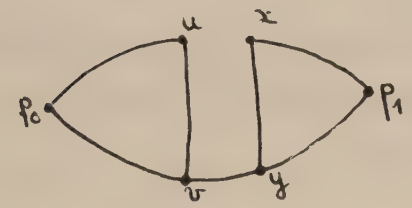


Fig. 31

vrement formé des deux graphes SP (P_o, P_1) de la figure 31 ; nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$.

Dans l'hypothèse où u et v sont respectivement sommets de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_2$, $\sigma(H')$ est donc égal à 2. Comme il existe des graphes d'invariant σ égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_2$ d'une part, et $\sigma(G) = 2$ d'autre part, sont compatibles.

Nous démontrerions de même que l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ est compatible avec l'hypothèse $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_1$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_2$.

8) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$, $v = p_1$ -

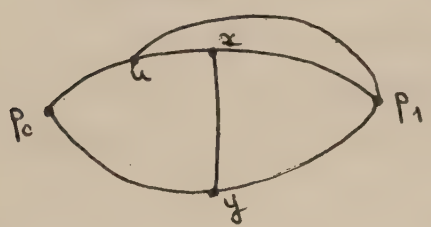


Fig. 32

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 32. H' possède un recouvrement formé des deux graphes SP (P_o, P_1) de la figure 33 ; nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$. Dans l'hypothèse où u est un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et où $v = P_1$, $\sigma(H')$ est donc égal à 2.

Comme il existe des graphes d'invariant égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_1$, $v = P_1$ d'une part, et $\sigma(G) = 2$, d'autre part, sont compatibles.

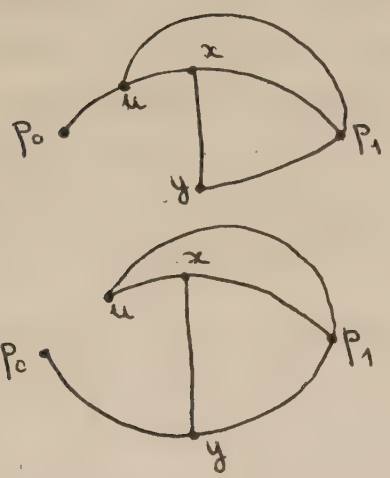


Fig. 33

Nous démontrerions de même que l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ est compatible avec chacune des trois hypothèses suivantes :
$u \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_1$, $v = P_o$; $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'_2$, $v = P_1$;
$u \in \overset{\circ}{\gamma}{}''_2$, $v = P_o$.

9) - $u, v \in \gamma$. - G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 34.

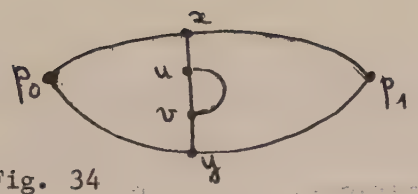


Fig. 34

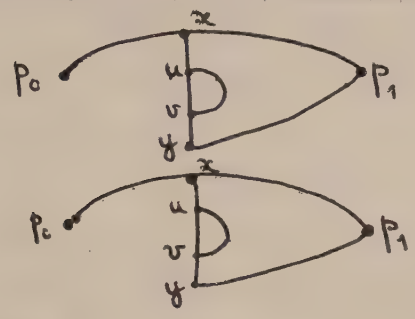


Fig. 35

H possède un recouvrement formé des deux graphes SP (P_o, P_1) de la figure 35 ; nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$. Dans l'hypothèse où u et v sont des sommets de γ, $\sigma(H')$ est donc égal à 2.

Comme il existe des graphes d'invariant σ égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u, v \in \gamma$ d'une part, et $\sigma(G) = 2$ d'autre part, sont compatibles.

10) - $u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$.

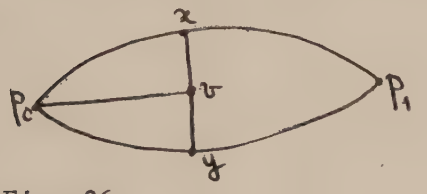


Fig. 36

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 36. H' possède un recouvrement formé des deux graphes SP (P_o, P_1) de la figure 37 ; nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$.

Dans l'hypothèse où u est égal à P_o et où v est un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$, $\sigma(H')$ est donc égal à 2. Comme il existe des graphes d'invariant σ égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$ d'une part, et $\sigma(G) = 2$ d'autre part, sont compatibles.

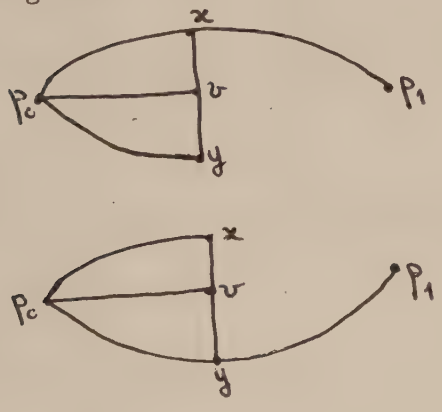


Fig. 37

De même, nous démontrerions que l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ est compatible avec l'hypothèse $u = P_1$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$.

Nous allons résumer les résultats des 10 paragraphes précédents dans un tableau. Chaque ligne (resp. colonne) de celui-ci correspond à un sous-graphe partiel de H auquel peut appartenir l'extrémité u (resp. l'extrémité v) de μ. Chaque case du tableau correspond à une position éventuelle du couple de sommets (u, v). u et v jouant des rôles symétriques, ce tableau est triangulaire ; comme μ est élémentaire, nous ne tenons pas compte des cases correspondant à $u = v = x$, $u = v = y$; $u = v = P_o$ et $u = v = P_1$. Dans toute case du tableau nous inscrirons "non" si le couple (u, v) ne peut avoir la position correspondant à cette case (nous noterons entre parenthèses le numéro du paragraphe dans

lequel cela a été démontré) ; nous inscrirons "oui" si la position du couple (u, v) correspondant à cette case est compatible avec l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ (nous noterons entre parenthèses le numéro du paragraphe dans lequel cela a été démontré).

Exemple -

u \ v		$\overset{\circ}{\gamma}''_2$	
$\overset{\circ}{\gamma}'_1$		non (2)	

En effet, nous avons démontré au paragraphe 2) qu'il était impossible que u appartienne à $\overset{\circ}{\gamma}'_1$ et v à $\overset{\circ}{\gamma}''_2$.

u \ v	$\overset{\circ}{\gamma}'_1$	$\overset{\circ}{\gamma}''_1$	$\overset{\circ}{\gamma}'_2$	$\overset{\circ}{\gamma}''_2$	x	y	p_o	p_1	$\overset{\circ}{\gamma}$
$\overset{\circ}{\gamma}'_1$	OUI (6)	NON (1)	OUI (7)	NON (2)	OUI (6)	NON (3)	OUI (6)	OUI (8)	NON (4)
$\overset{\circ}{\gamma}''_1$		OUI (6)	NON (2)	OUI (7)	OUI (6)	NON (3)	OUI (8)	OUI (6)	NON (4)
$\overset{\circ}{\gamma}'_2$			OUI (6)	NON (1)	NON (3)	OUI (6)	OUI (6)	OUI (8)	NON (4)
$\overset{\circ}{\gamma}''_2$				OUI (6)	NON (3)	OUI (6)	OUI (8)	OUI (6)	NON (4)
x						OUI (9)	OUI (6)	OUI (6)	OUI (9)
y							OUI (6)	OUI (6)	OUI (9)
p_o								NON (5)	OUI (10)
p_1									OUI (10)
$\overset{\circ}{\gamma}$									OUI (9)

- II - DEUXIEME PARTIE

Considérons le graphe G et ses deux chaînes γ_1 et γ_2 définies précédemment. Supposons qu'il existe deux chaînes élémentaires γ et γ' de G disjointes (sauf, peut-être, en leurs extrémités) d'extrémités respectives x, y et x', y', vérifiant

- $x, x' \in \overset{\circ}{\gamma}_1$
- $y, y' \in \overset{\circ}{\gamma}_2$
- $\{x,y\} \neq \{x',y'\}$
- les sommets intérieurs à γ et à γ' n'appartiennent pas à $\gamma_1 \cup \gamma_2$

1er cas - Plaçons-nous dans l'hypothèse où y = y' -

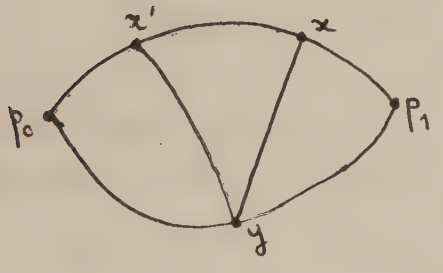


Fig. 38

Alors, puisque $\{x, x'\}$ est différent $\{y, y'\}$, x est différent de x'. Nous pouvons admettre que lorsque l'on parcourt γ_1 de P_o vers P_1, on rencontre x' avant x (x et x' jouant des rôles symétriques, le raisonnement reste valable si x précède x').

Posons $\gamma'_1 = \gamma_{1[P_o,x]}$. Alors la chaîne γ' a pour extrémités y et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_1$; or, nous savons (voir tableau page 136) que G ne peut contenir une chaîne élémentaire disjointe (sauf en ses extrémités) de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ et ayant pour extrémités y et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'_1$. L'hypothèse y = y' est donc absurde.

Par un raisonnement analogue nous démontrerions que l'hypothèse x = x' est absurde.

2ème cas - Plaçons-nous dans l'hypothèse où x', distinct de x, précède ce sommet sur γ_1 et où y, distinct de y', précède ce sommet sur γ_2.

Remarquons que le raisonnement reste valable si x précède x' sur γ_1 et y' précède y sur γ_2.

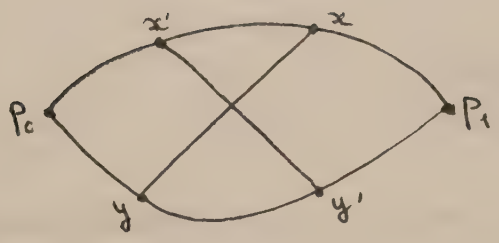


Fig. 39

Posons $\gamma_1' = \gamma_1[p_o, x]$ et $\gamma_2'' = \gamma_2[y, p_1]$. γ' est une chaîne élémentaire de G disjointe de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ (sauf en ses extrémités) et dont les extrémités sont un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}_1'$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}_2''$; nous savons, d'après le tableau de la page 136 , que ceci est impossible.

L'étude de ces deux cas est une simple formalisation des paragraphes 3) et 2) de I. Elle fournit les conditions nécessaires d'existence de γ et γ' suivantes : C_1. $x \neq x'$; $y \neq y'$.

C_2. y précède y' sur γ_2 lorsqu'on parcourt γ_2 de P_o vers P_1 (ce que nous notons $y \underset{\gamma_2}{\leq} y'$) si et seulement si x précède x' sur γ_1 lorsqu'on parcourt γ_1 de P_o vers P_1 (ce que nous notons $x \underset{\gamma_1}{\leq} x'$).

En termes intuitifs, γ et γ' doivent être deux chaînes parallèles disjointes.

Notation -

Etant donné une chaîne Γ d'extrémités P_o et P_1 et deux sommets s et t de Γ, "$s \underset{\Gamma}{\leq} t$" signifie que s précède t sur Γ quand on parcourt cette chaîne de P_o vers P_1 ou que s est égal à t.

Considérons n chaînes élémentaires de G $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}$, d'extrémités respectives $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$, $x^{(2)}$ et $y^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ et vérifiant les conditions suivantes :

. $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ sont disjointes deux à deux (sauf peut-être en leurs extrémités).

. $\forall i \in \{1,2,\ldots, n\}$, $x^{(i)} \in \overset{\circ}{\gamma}{}_1$

. $\forall i \in \{1,2,\ldots, n\}$, $y^{(i)} \in \overset{\circ}{\gamma}{}_2$

. $\forall (i,j) \in \{1,\ldots, n\}^2$, $i \neq j$, $\{x^{(i)}, y^{(i)}\} \neq \{x^{(j)}, y^{(j)}\}$

. $x^{(1)} \underset{\gamma_1}{\leq} x^{(2)} \underset{\gamma_1}{\leq} \ldots\ldots\ldots \underset{\gamma_1}{\leq} x^{(n)}$

. Pour tout i de {1,2,...., n} , les points intérieurs à $\gamma^{(i)}$ n'appartiennent pas à $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Remarquons que ces n chaînes doivent vérifier deux à deux les conditions C_1 et C_2 ; ceci implique les relations suivantes :

$$x^{(1)} \underset{\gamma_1}{\leq} x^{(2)} \underset{\gamma_1}{\leq} \ldots\ldots \underset{\gamma_1}{\leq} x^{(n)}$$

$$y^{(1)} \underset{\gamma_2}{\leq} y^{(2)} \quad \ldots\ldots \underset{\gamma_2}{\leq} y^{(n)}$$

Supposons que n soit supérieur ou égal à 3. Soit alors, H' le sous-graphe partiel de G formé de γ_1, γ_2, $\gamma^{(1)}$,....., $\gamma^{(n)}$; $H' = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \gamma^{(i)})$. H' étant un bloc non SP (P_o, P_1) contenu dans G, $\sigma(H') = 2$, considérons un recouvrement $\{H'_1, H'_2\}$ de H' par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1).

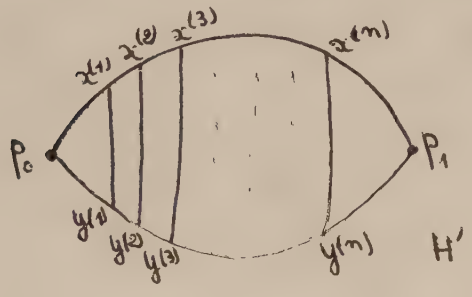


Fig. 40

Comme au Chapitre V nous dirons que deux chaînes d'extrémités P_o et P_1 sont inconciliables si leur réunion forme un graphe qui n'est pas SP (P_o, P_1).

$\gamma_1[P_o, x^{(1)}] \cup \gamma^{(1)}[x^{(1)}, y^{(1)}] \cup \gamma_2[y^{(i)}, P_1]$ et $\gamma_2[P_o, y^{(1)}] \cup \gamma^{(1)}[y^{(1)}, x^{(1)}] \cup \gamma_1[x^{(1)}, P_1]$ sont deux chaînes inconciliables de H' ; elles sont donc contenues dans deux graphes différents du recouvrement.

Soit H'_1 le graphe du recouvrement qui contient la première de ces chaînes et H'_2 celui qui contient la seconde. H'_1 et H'_2 sont évidemment différents.

$\gamma_1[P_o, x^{(3)}] \cup \gamma^{(3)}[x^{(3)}, y^{(3)}] \cup \gamma_2[y^{(3)}, P_1]$ et $\gamma_2[P_o, y^{(3)}] \cup \gamma^{(3)}[y^{(3)}, x^{(3)}] \cup \gamma_1[x^{(3)}, P_1]$ sont deux chaînes inconciliables de H' ; donc l'une d'entre elles

est contenue dans H'_1 et l'autre dans H'_2.

Nous distinguons deux cas :

<u>1er cas</u> - $\gamma_1[p_o, x^{(3)}] \cup \gamma^{(3)}[x^{(3)}, y^{(3)}] \cup \gamma_2[y^{(3)}, p_1]$ est contenue dans H'_2 et $\gamma_2[p_o, y^{(3)}] \cup \gamma^{(3)}[y^{(3)}, x^{(3)}] \cup \gamma_1[x^{(3)}, p_1]$ dans H'_1. Les deux graphes G_1 et G_2 de la figure 41 sont alors des sous-graphes partiels respectivement de H'_1 et de H'_2.

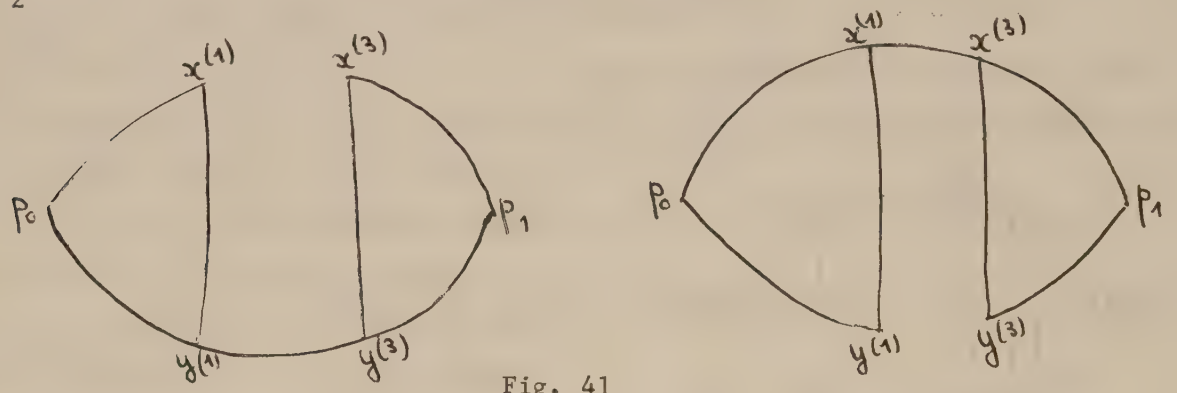


Fig. 41

Adjoignons à chacun des graphes G_1 et G_2 la chaîne élémentaire $\gamma_1[p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)}[x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2[y^{(2)}, p_1]$ de H' ; les arêtes de $\gamma^{(1)}$ (resp. $\gamma^{(3)}$) dans le graphe $G_1 \cup \gamma_1[p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)}[x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2[y^{(2)}, p_1]$ (resp. $G_2 \cup \gamma_1[p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)}[x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2[y^{(2)}, p_1]$) ainsi obtenu ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons

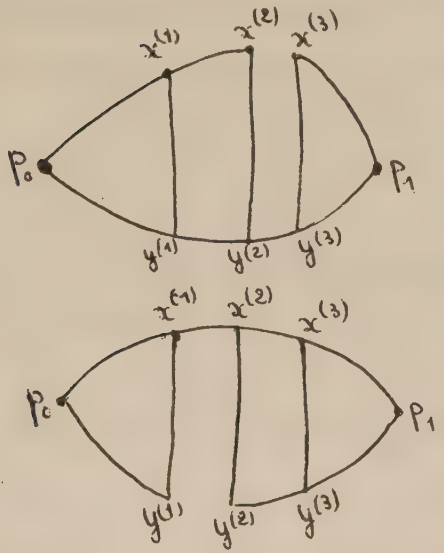


Fig. 42

que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne

$\gamma_1 [p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)} [x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2 [y^{(2)}, p_1]$ de H', ce qui est impossible puisque H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'.

2ème cas - $\gamma_1 [p_o, x^{(3)}] \cup \gamma^{(3)} [x^{(3)}, y^{(3)}] \cup \gamma [y^{(3)}, p_1]$ est contenue dans H'_1 et $\gamma_2 [p_o, y^{(3)}] \cup \gamma^{(3)} [y^{(3)}, x^{(3)}] \cup \gamma_1 [x^{(3)}, p_1]$ dans H'_2.

Les deux graphes G_1 et G_2 de la figure 43 sont alors des sous-graphes partiels respectivement de H'_1 et de H'_2.

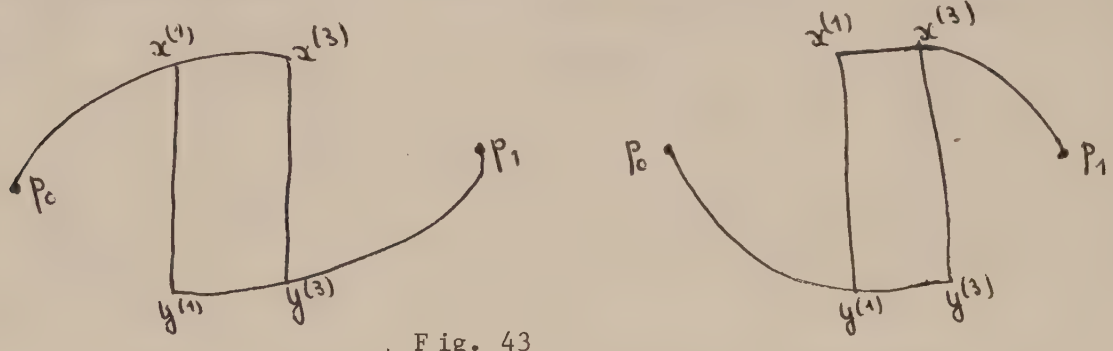


Fig. 43

Adjoignons à chacun des graphes G_1 et G_2 la chaîne élémentaire

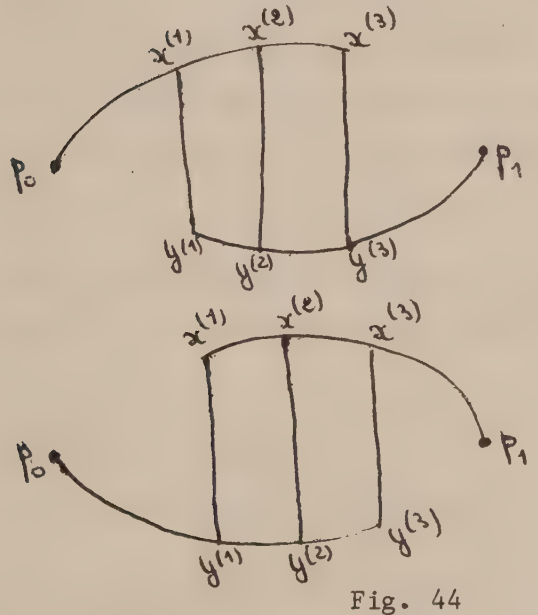


Fig. 44

$\gamma_1 [p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)} [x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2 [y^{(2)}, p_1]$

de H' ; les arêtes de $\gamma^{(2)}$ dans les graphes

$G_1 \cup \gamma_1 [p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)} [x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2 [y^{(2)}, p_1]$ et

$G_2 \cup \gamma_1 [p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)} [x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2 [y^{(2)}, p_1]$ ainsi obtenus ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la

chaîne $\gamma_1[p_o, x^{(2)}] \cup \gamma^{(2)}[x^{(2)}, y^{(2)}] \cup \gamma_2[y^{(2)}, p_1]$ de H' ce qui est impossible puisque H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'. Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité ; l'hypothèse $n \geq 3$ est donc absurde. Comme, d'après la remarque fondamentale 2 de la page 120 , n est au moins égal à 1, nous en déduisons que n ne peut prendre que l'une des deux valeurs 1 ou 2.

Nous allons poursuivre notre étude en distinguant deux cas.

Dans la partie III nous obtiendrons une caractérisation de G liée à l'hypothèse n = 2 ; dans la partie IV, nous nous placerons au contraire dans l'hypothèse où n = 1.

- III - TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, nous supposons donc que n soit égal à 2. Cela signifie que G contient, outre γ_1 et γ_2, deux chaînes élémentaires γ et γ', disjointes, d'extrémités respectives x, y, et x', y', vérifiant $x, x' \in \overset{\circ}{\gamma}_1$; $y, y' \in \overset{\circ}{\gamma}_2$; $x \underset{\gamma_1}{\leq} x'$; $y \underset{\gamma_2}{\leq} y'$.

Soit H le sous-graphe partiel de G constitué de γ_1, γ_2, γ et γ' ; le graphe H est représenté à la figure 45.

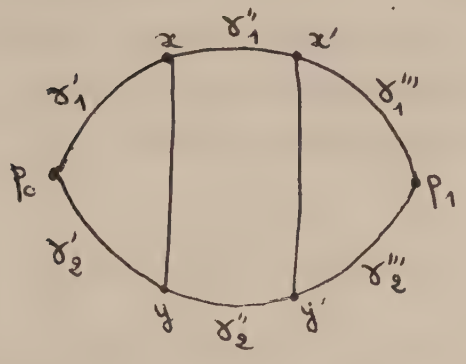


Fig. 45

H étant un bloc, non SP (P_o, P_1), contenu dans G, $\sigma(G) = 2$ implique $\sigma(H) = 2$. Posons

$\gamma'_1 = \gamma_1[p_o,x]$ $\gamma'_2 = \gamma_2[p_o,y]$

$\gamma''_1 = \gamma_1[x,x']$ $\gamma''_2 = \gamma_2[y,y']$

$\gamma'''_1 = \gamma_1[x',p_1]$ $\gamma'''_2 = \gamma_2[y',p_1]$

Soit $\{H_1, H_2\}$ un recouvrement de H par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) ; $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ et $\gamma_2[p_o,y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ sont deux chaînes inconciliables de H ; elles sont donc contenues dans deux graphes différents du recouvrement. Soit H_1 le graphe du recouvrement qui contient la première de ces chaînes et H_2 celui qui contient la seconde. H_1 et H_2 sont évidemment différents.

$\gamma_1[p_o,x'] \cup \gamma'[x',y'] \cup \gamma_2[y',p_1]$ et $\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x',p_1]$ sont deux chaînes inconciliables de H ; donc l'une d'entre elles est contenue dans H_1 et l'autre dans H_2. Nous distinguons deux cas :

<u>1er cas</u> - $\gamma_1[p_o,x'] \cup \gamma'[x',y'] \cup \gamma_2[y',p_1]$ est contenue dans H_1 et

$\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x',p_1]$ est contenue dans H_2.

Les deux graphes G_1 et G_2 de la figure 46 sont alors des sous-graphes partiels respectivement de H_1 et de H_2.

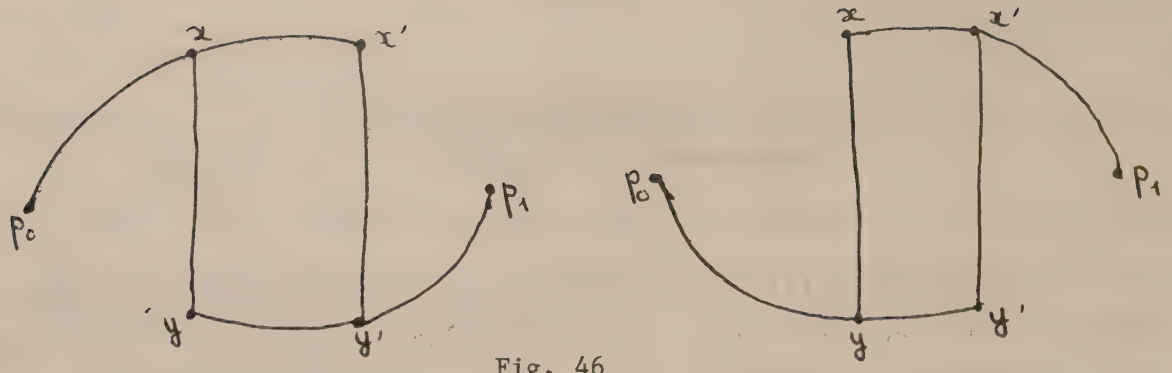


Fig. 46

Adjoignons à chacun des graphes G_1 et G_2 la chaîne γ_1 de H ; les arêtes de γ' (resp. γ) dans le graphe $G_1 \cup \gamma_1$ (resp. $G_2 \cup \gamma_1$) ainsi obtenu ne vérifient pas la condition nécessaire d'ELGOT et WRIGHT ; ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que ni H_1 ni H_2 ne contiennent la chaîne γ_1 de H, ce qui est impossible puisque H_1 et H_2 forment un recouvrement de H.

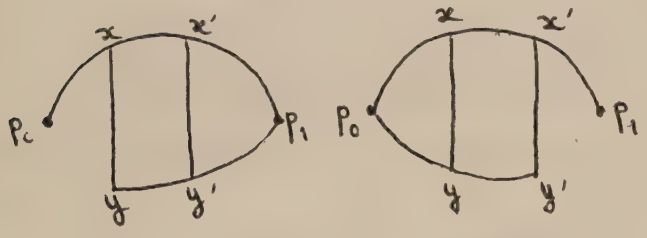


Fig. 47

<u>2ème cas</u> - $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma'[x',y'] \cup \gamma_2[y',p_1]$ est contenue dans H_2 et $\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x' p_1]$ dans H_1. Les deux graphes G_1 et G_2 de la figure 48 sont alors des sous-graphes partiels respectivement de H_1 et de H_2.

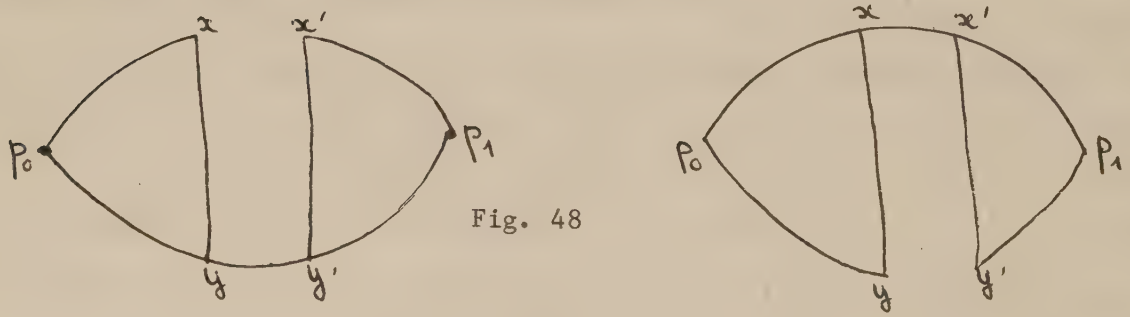


Fig. 48

On vérifie que G_1 et G_2 sont des sous-graphes partiels maximaux SP(P_o, P_1) de H, ce qui implique $G_1 = H_1$ et $G_2 = H_2$; ces deux graphes forment en outre un recouvrement de H. H admet donc un recouvrement de cardinal 2 unique ; celui-ci est formé des deux graphes H_1 et H_2 de la figure 49.

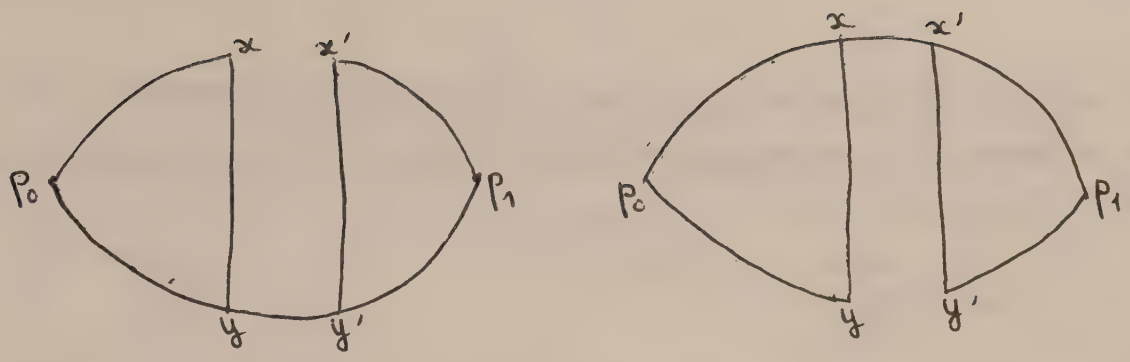


Fig. 49

G étant un bloc, toute arête e de G est contenue dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 ; soit μ la sous-chaîne maximale de celle-ci qui contient e et dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à H. Les extrémités de μ sont distinctes et appartiennent à H. G est donc la réunion de H et de toutes les chaînes élémentaires μ de G d'extrémités u et v vérifiant $u \neq v$; $u, v \in X(H)$; $\mu \cap H = \{u,v\}$. Soit M l'ensemble de ces chaînes μ.

Considérons une chaîne μ de M et étudions les différentes positions que peuvent prendre dans H les extrémités u et v de μ. Pour cela nous utilisons les résultats du paragraphe I que nous complétons par l'étude des cinq cas suivants ; l'étude des trois premiers exclut certaines positions que pourraient prendre u et v en établissant des incompatibilités entre celles-ci et le fait que $\sigma(G) = 2$; l'étude des deux derniers nous indique des positions de u et v, compatibles avec la propriété $\sigma(G) = 2$.

Posons $H' = H \cup \mu$.

1) - $u = P_o$; $v \in \overset{\circ}{\gamma'}$ -

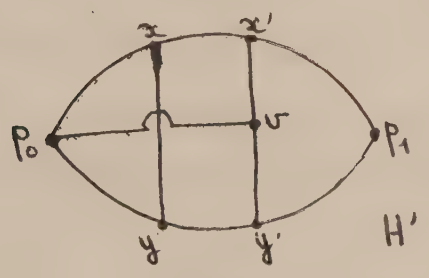


Fig. 50

H' étant un bloc, non SP (P_o, P_1), contenu dans G, $\sigma(G) = 2$ implique $\sigma(H') = 2$. Puisque H est un sous-graphe partiel de H', un recouvrement de H' par deux graphes SP (P_o, P_1) est donc constitué de deux graphes H'_1 et H'_2 vérifiant $H_1 \subset H'_1$, $H_2 \subset H'_2$.

Adjoignons à chacun des graphes H_1 et H_2 la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H' ; les arêtes de γ dans les graphes $H_1 \cup \mu[p_o,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ et

$H_2 \cup \mu[p_o,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1).

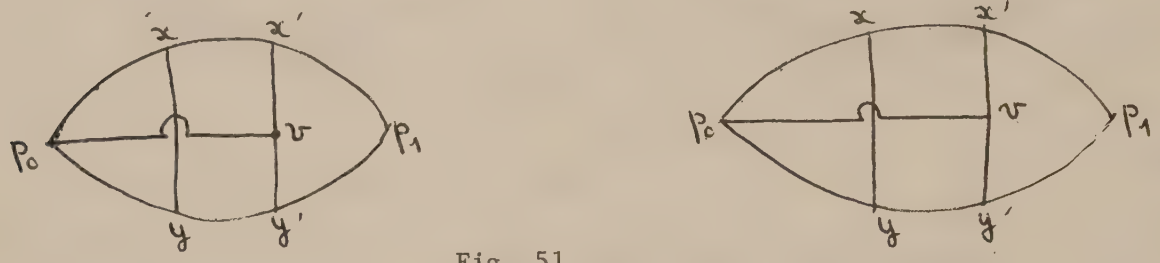


Fig. 51

Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',y] \cup \gamma[y,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H', ce qui est impossible puisque H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'. L'hypothèse $u = P_o$ et $v \in \overset{\circ}{\gamma}'$ est donc absurde et μ ne peut avoir pour extrémités P_o et un sommet de γ'. De même nous démontrerions que μ ne peut avoir pour extrémités P_1 et un sommet de γ°.

2) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}'$ -

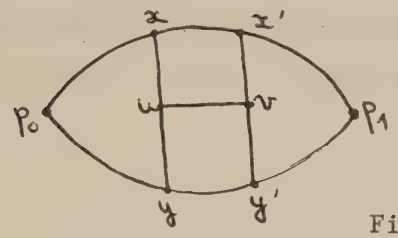


Fig. 52

Le graphe H' (fig. 52) est un sous-graphe partiel de G ; ici encore $\sigma(H')=2$ et tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux graphes SP (P_o, P_1) H'_1 et H'_2 vérifiant $H_1 \subset H'_1$, $H_2 \subset H'_2$. Adjoignons à chacun des graphes H_1 et H_2 la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',p_1]$; les arêtes de $\gamma[y,u]$ (resp. $\gamma[u,x]$) du graphe $H_1 \cup \gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma'[v,y] \cup \gamma_2[y',p_1]$ (resp. $H_2 \cup \gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma'[v,y] \cup \gamma_2[y',p_1]$ ainsi obtenu ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT ; ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1).

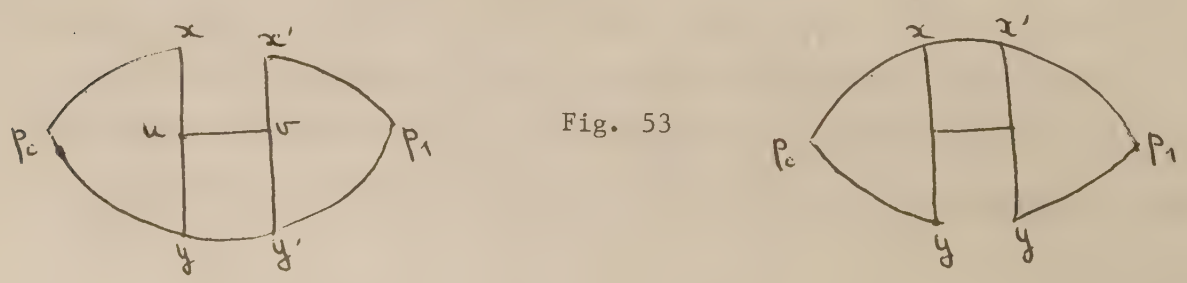


Fig. 53

Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu[u,v] \cup \gamma'[v,y'] \cup \gamma_2[y',p_1]$ de H', ce qui est impossible puisque H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'. L'hypothèse $u \in \mathring{\gamma}$ et $v \in \mathring{\gamma}'$ est donc absurde et μ ne peut avoir pour extrémités un sommet de $\mathring{\gamma}$ et un sommet de $\mathring{\gamma}'$.

3) - $u \in \gamma'_1$, $v = P_1$ -

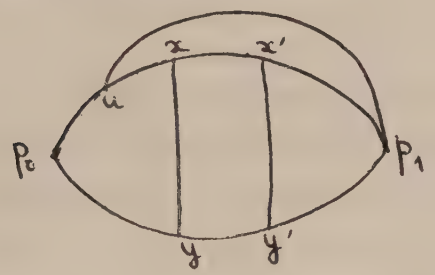


Fig. 54

Dans la partie I nous avons montré que μ ne peut avoir pour extrémités P_o et P_1, ce qui implique qu'ici u est différent de P_o. Le graphe H' de la figure 54 est un sous-graphe partiel de G ; ici encore $\sigma(H') = 2$ et tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux graphes H'_1 et H'_2, SP (P_o, P_1) vérifiant $H_1 \subset H'_1, H_2 \subset H'_2$. Adjoignons à chacun des graphes H_1 et H_2 la chaîne $\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x',u] \cup \mu[u,p_1]$ de H' ; les arêtes de γ' dans les deux graphes ainsi obtenus ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. ces deux graphes ne sont donc pas SP (P_o, P_1).

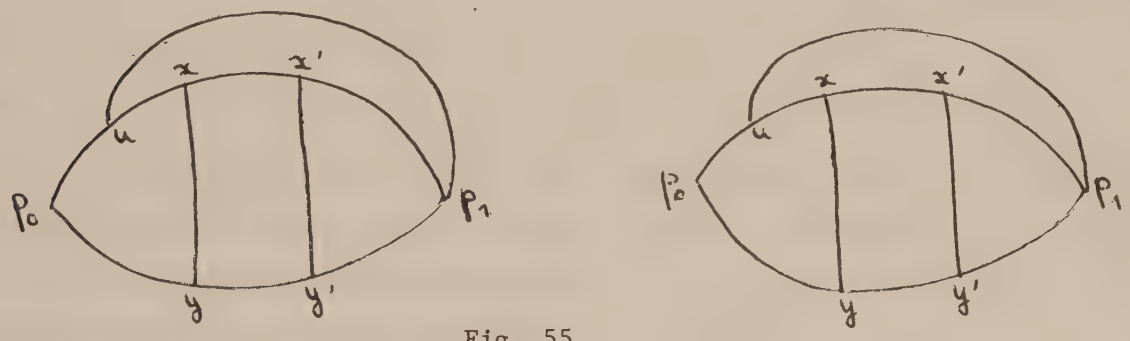


Fig. 55

Nous en déduisons ici encore que l'hypothèse $u \in \gamma'_1$ et $v = P_1$ est absurde et que μ ne peut avoir pour extrémités P_1 et un sommet de γ'_1. De même nous démontrerions que μ ne peut avoir pour extrémités P_1 et un sommet de γ'_2, ni P_o et un sommet de γ'''_1, ni P_o et un sommet de γ'''_2. Comme nous l'avons annoncé, les deux cas suivants correspondent à des positions des sommets u et v compatibles avec la propriété $\sigma(G) = 2$.

4) - $u \in \overset{\circ}{\gamma}''_1$, $v = P_1$ -

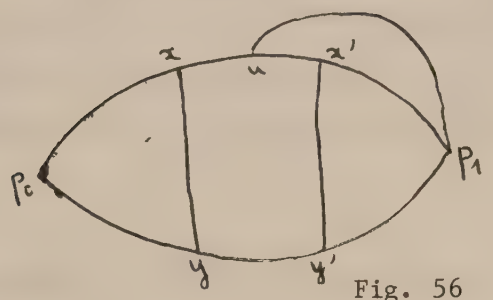


Fig. 56

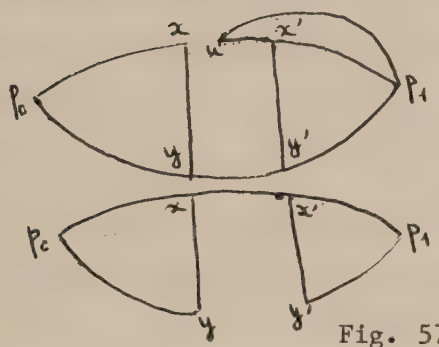


Fig. 57

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 56. H' possède un recouvrement formé des deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de la figure 57 ; comme H' est un bloc, non SP (P_o, P_1) contenu dans G, $\sigma(G) = 2$ implique $\sigma(H') = 2$. Dans l'hypothèse où u est sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'''_1$ et où $v = P_1$, $\sigma(H')$ est donc égal à 2.

Comme il existe des graphes d'invariant σ égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u \in \overset{\circ}{\gamma}''_1$, $v = P_1$ d'une part et $\sigma(G) = 2$ d'autre part sont compatibles.

De même nous démontrerions que l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ est compatible avec chacune des trois hypothèses suivantes :

$u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}''_1$; $u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}''_2$; $u \in \overset{\circ}{\gamma}''_2$, $v = P_1$.

5) - $u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$ -

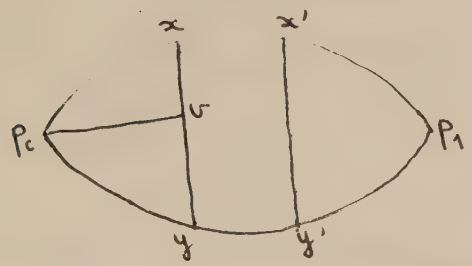


Fig. 58

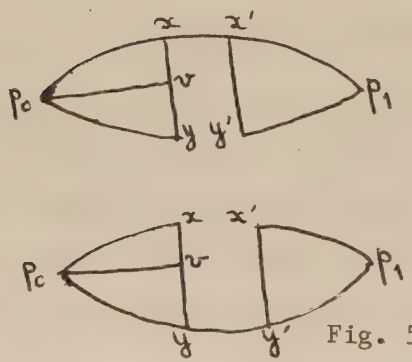


Fig. 59

G contient le graphe $H' = H \cup \mu$ de la figure 58. H' possède un recouvrement formé des deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) de la figure 59 ; comme de plus H' est un bloc et n'est pas SP (P_o,P_1), nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$.

Dans l'hypothèse où v est un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}$ et où $u = P_o$, $\sigma(H')$ est donc égal à 2.

Comme il existe des graphes d'invariant σ égal à 2 contenant H' (ne serait-ce que H' lui-même), les hypothèses $u = P_o$, $v \in \overset{\circ}{\gamma}$ d'une part et $\sigma(G) = 2$ d'autre part, sont compatibles.

Nous démontrerions de même que les hypothèses $\sigma(G) = 2$ d'une part, et $u \in \overset{\circ}{\gamma}'$, $v = P_1$ d'autre part, sont compatibles.

Nous allons résumer les résultats de I et des cinq paragraphes précédents dans un tableau. Chaque ligne (resp. colonne) de celui-ci correspond à un sous-graphe partiel de H auquel pourrait éventuellement appartenir l'extrémité u (resp. l'extrémité v) de μ. Chaque case du tableau correspond donc à une position éventuelle du couple (u,v), u et v jouant des rôles symétriques, ce tableau est triangulaire ; comme μ est élémentaire, nous ne tenons pas compte des cases correspondant à $u = v = x, u = v = y, u = v = x', u = v = y', u = v = P_o$ et $u = v = P_1$.

Dans toute case du tableau nous inscrirons "non" si le couple (u,v) ne peut avoir la position correspondant à cette case (nous noterons entre parenthèses le numéro du paragraphe dans lequel cela a été démontré). Nous inscrirons "oui" si la position du couple (u,v) correspondant à cette case est compatible avec l'hypothèse $\sigma(G) = 2$ (nous noterons entre parenthèses le numéro du paragraphe dans lequel cela a été démontré).

Exemple -

u \ v		y'	P_o	P_1
$\overset{\circ}{\gamma}{}'''_1$		non (I)	non (III,3)	oui (I)

En effet, les résultats de la partie I (voir tableau, page 136) nous permettent d'affirmer que μ ne peut avoir pour extrémités y' et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'''_1$ et que les hypothèses $u \in \overset{\circ}{\gamma}{}'''_1$, $v = P_1$ d'une part et $\sigma(G) = 2$ d'autre part sont compatibles. Nous avons démontré, au paragraphe III, 3) que μ ne peut avoir pour extrémités P_o et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}'''_1$.

u \ v	$\delta^\circ_1{}'$	$\delta^\circ_1{}''$	$\delta^\circ_1{}'''$	$\delta^\circ_2{}'$	$\delta^\circ_2{}''$	$\delta^\circ_2{}'''$	x	y	x'	y'	p_0	p_1	δ°	$\delta^\circ{}'$
$\delta^\circ_1{}'$	OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (car n=2)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (III,3)	NON (I)	NON (I)
$\delta^\circ_1{}''$		OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (car n=2)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	OUI (III4)	OUI (III4)	NON (I)	NON (I)
$\delta^\circ_1{}'''$			OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (n=2)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	NON (III3)	OUI (I)	NON (I)	NON (I)
$\delta^\circ_2{}'$				OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (III3)	NON (I)	NON (I)
$\delta^\circ_2{}''$					OUI (I)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (I)	OUI (I)	OUI (III4)	OUI (III4)	NON (I)	NON (I)
$\delta^\circ_2{}'''$						OUI (I)	NON (I)	NON (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (III3)	OUI (I)	NON (I)	NON (I)
x								OUI (I)	OUI (I)	NON (I)	OUI (I)	NON (III3)	OUI (I)	NON (I)
y									NON (I)	OUI (I)	OUI (I)	NON (III3)	OUI (I)	NON (I)
x'										OUI (I)	NON (III3)	OUI (I)	NON (I)	OUI (I)
y'											NON (III3)	OUI (I)	NON (I)	OUI (I)
p_0												NON (I)	OUI (III5)	NON (III1)
p_1													NON (III1)	OUI (III5)
δ°													OUI (I)	NON (III2)
$\delta^\circ{}'$														OUI (I)

Nous allons maintenant établir des conditions nécessaires à l'existence de deux chaînes μ et μ' de M.

Propositions 1 -

(P_1) Soient v et v' deux sommets distincts de γ''_1.
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

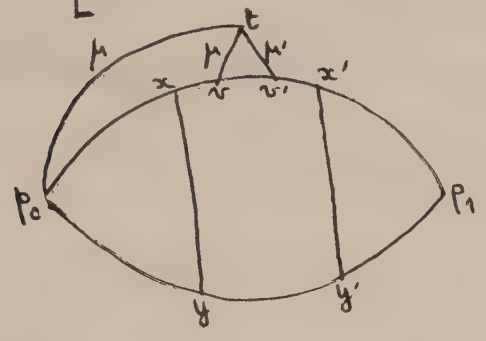


Fig. 60

Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers v'. Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'_{[t,v']}$ étant connexe, $\sigma(H')$ est strictement positif. Par toute arête de H', nous vérifions qu'il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 ; H' ne peut donc avoir un invariant $\sigma(H')$ égal à 1 que s'il est $SP(P_o,P_1)$, ce qui n'est pas le cas, d'où $\sigma(H') \geq 2$. Comme H' est un sous-graphe partiel de G et que $\sigma(G) = 2$, nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$. H' contenant H, tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux de ses sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $H_1 \subset H'_1$ et $H_2 \subset H'_2$.

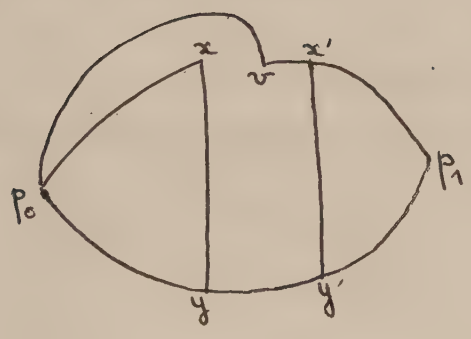
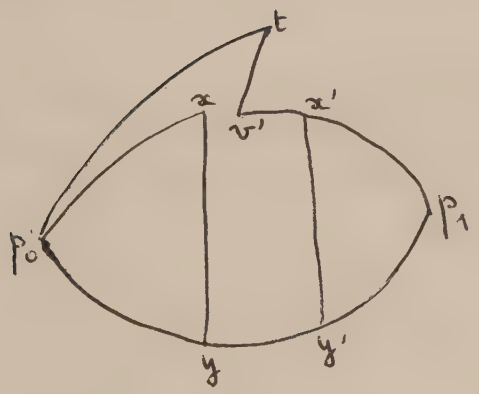


Fig. 61

Si l'on adjoint la chaîne $\mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_{1[v,P_1]}$ de H' à H_1, le graphe obtenu (figure 61) n'est pas $SP(P_o, P_1)$ (les arêtes de γ' n'y vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT); nous en déduisons que la chaîne $\mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_{1[v,P_1]}$ n'est pas contenue



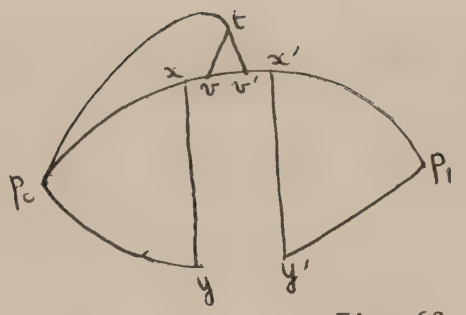


Fig. 62

dans H'_1 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', cette chaîne est contenue dans H'_2. H'_2 contient alors le graphe

$G_2 = H_2 \cup \mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_1[v,P_1]$

Adjoignons à H_1 et à G_2, la chaîne $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'[t,v'] \cup \gamma_1[v',P_1]$ de H'.

Les deux graphes ainsi obtenus (figure 62) ne sont pas SP (P_o,P_1). Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'[t,v'] \cup \gamma_1[v',P_1]$, ce qui est impossible puisque H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition est démontrée.
Nous démontrerions de même les trois propositions suivantes :

(P'_1) Soient v et v' deux sommets distincts de γ''_1. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_1, v et P_1, v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

(P''_1) Soient v et v' deux sommets distincts de γ''_2. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,v et P_o, v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

(P'''_1) Soient v et v' deux sommets distincts de γ''_2. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_1,v et P_1,v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

Propositions 2 -

(P_2) Soient u' et v deux sommets de $\mathring{\gamma}_1$. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,v et u',P_1, alors v précède u' sur γ_1 (ce que nous notons $v \underset{\gamma_1}{\leq} u'$).

Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités P_o,v et u',P_1, vérifiant $u' \underset{\gamma_1}{\leq} v$; nous distinguons deux cas selon que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide ou non.

1er cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers P_1. $\nu = \mu[p_o,t] \cup \mu'[t,p_1]$ est alors une chaîne de M d'extrémités P_o et P_1, ce qui est impossible (voir tableau page 150).

2ème cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$

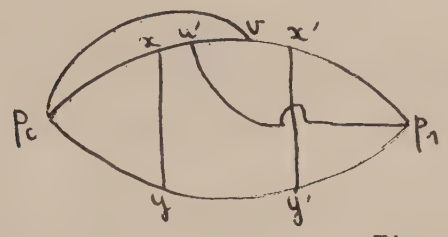


Fig. 63

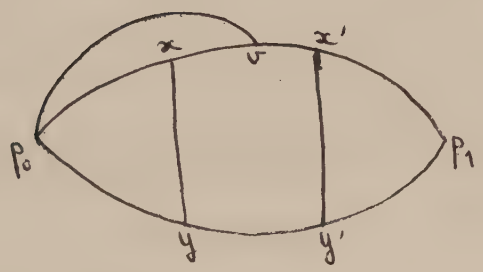


Fig. 64

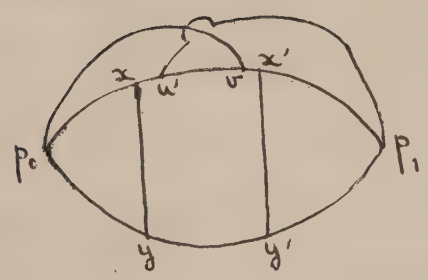
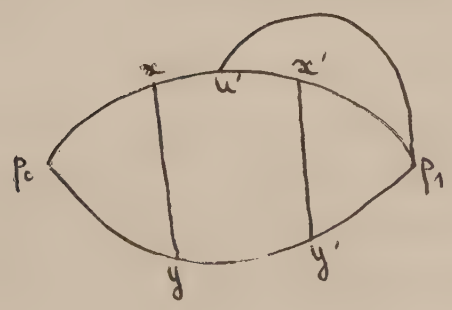


Fig. 65



$H' = H \cup \mu \cup \mu'$ (figure 63) étant connexe, $\sigma(H')$ est strictement positif. Par toute arête de H', nous vérifions qu'il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 ; H' ne peut donc avoir un invariant $\sigma(H')$ égal à 1 que s'il est SP (P_o, P_1) ce qui n'est pas le cas, d'où $\sigma(H') \geq 2$. Comme H' est un sous-graphe de G et que $\sigma(G) = 2$, nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$. H' contenant H, tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux de ses sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $H_1 \subset H'_1$ et $H_2 \subset H'_2$.

Si l'on adjoint la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma[x,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ de H' à H_2, le graphe obtenu (figure 64) n'est pas SP (P_o, P_1), (les arêtes de γ' n'y vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', elle est donc contenue dans H'_1. H'_1 contient alors le graphe $G_1 = H_1 \cup \mu[p_o,v] \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma[x,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$.

Adjoignons à G_1 et à H_2 la chaîne $\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x',u'] \cup \mu'[u',p_1]$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 65) ne sont pas SP(P_o,P_1).

Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent $\gamma_2[p_o,y'] \cup \gamma'[y',x'] \cup \gamma_1[x',u'] \cup \mu'[u',p_1]$, ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de H'.

Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité, ce qui démontre la proposition (P_2).

Nous établirons de même la proposition suivante :

(P'_2) [Soient u' et v deux sommets de $\mathring{\gamma}'_2$. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', P_1, alors v précède u' sur γ_1 (ce que nous notons $v \overset{\leq}{\gamma_1} u'$).

Propositions 3 -

(P_3) [Soient u et v' deux sommets distincts de γ. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

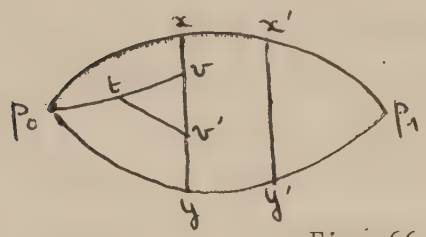


Fig. 66

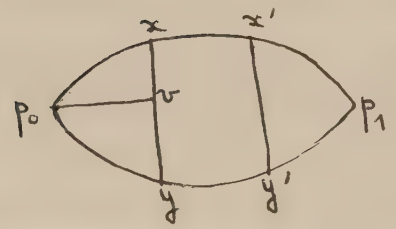
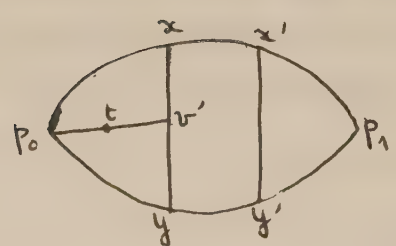


Fig. 67



Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers v'.

Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'[t,v']$ (figure 66) est inclus dans G ; nous en déduisons ici encore que $\sigma(H') = 2$. Tout recouvrement $\{H'_1, H'_2\}$ de H' vérifie $H_1 \subset H'_1$ et $H_2 \subset H'_2$.

Si l'on adjoint la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ à H_1, le graphe obtenu (figure 67) n'est pas $SP(P_o,P_1)$, (les arêtes de γ et de γ' ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante

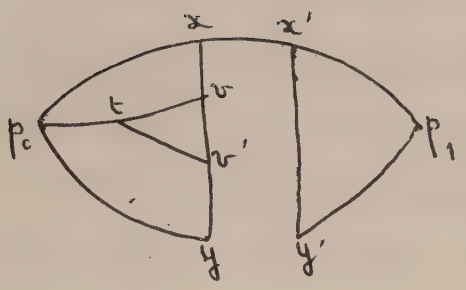


Fig. 68

d'ELGOT ET WRIGHT ; nous en déduisons que la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ n'est pas contenue dans H_1' ; cette chaîne est donc contenue dans H_2'. H_2' contient alors le graphe $G_2 = H_2 \cup \mu[p_o,v] \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$. Adjoignons à H_1 et à G_2 la chaîne $\mu[p_o,t] \cup \mu'[t,v'] \cup \gamma[v',x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 68) ne sont pas SP (P_o,P_1), (en effet les arêtes de γ' dans le premier et celles de $\mu'[t,v']$ dans le second ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT. Nous en déduisons que ni H_1' ni H_2' ne contiennent la chaîne $\mu[p_o,t] \cup \mu'[t,v'] \cup \gamma[v',x] \cup \gamma_1[x,p_1]$, ce qui contredit le fait que ces deux graphes forment un recouvrement de H'.

L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition (P_3) est démontrée.

Nous démontrons de même la proposition suivante :

(P_3') Soient v et v' deux sommets distincts de γ'. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_1, v et P_1, v', alors $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide.

Propositions 4 -

(P_4) Soient u', v' deux sommets de γ_1'' et v un sommet de $\mathring{\gamma}_1''$; u' précède v' sur γ_1. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v', alors $v \in \gamma_1[x,u'] \cup \gamma_1[v',x']$.

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités P_o, v et u', v, vérifiant $u' <_{\gamma_1} v <_{\gamma_1} v'$; nous distinguons deux cas selon que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide ou non.

1er cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$, rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. μ et $\nu = \mu[p_o,t] \cup \mu'[t,v']$ sont alors deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o,v et P_o,v' (où v et v' sont deux sommets distincts de γ_1'') et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\nu} \neq \emptyset$. Ceci est impossible en vertu de la proposition (P_1).

2ème cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$

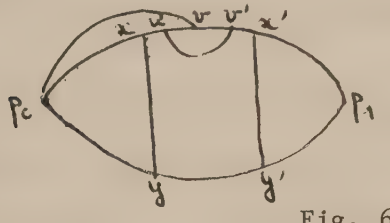


Fig. 69

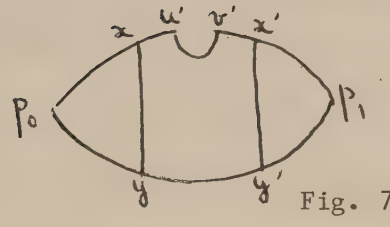


Fig. 70

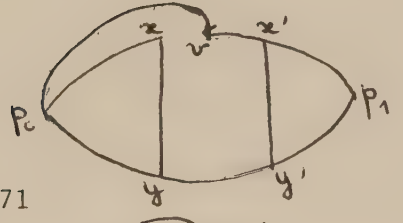
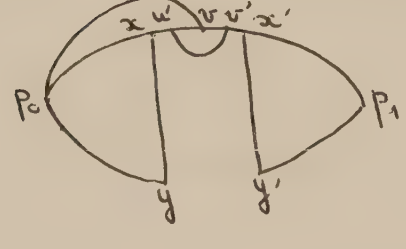


Fig. 71



Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'$ (figure 69) est inclus dans G et vérifie $\sigma(H') = 2$. Tout recouvrement $\{H_1', H_2'\}$ de H' vérifie $H_1 \subset H_1'$ et $H_2 \subset H_2'$.

Si l'on adjoint la chaîne $\gamma_1[p_o,u'] \cup \mu'[u',v'] \cup \gamma_{11}[v',p_1]$ de H' à H_1, le graphe obtenu (figure 70) n'est pas SP (P_o, P_1), (les arêtes de γ et de γ' n'y vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H_1' ; H_1' et H_2' formant un recouvrement de H', elle est donc contenue dans H_2'. Celui-ci contient alors le graphe $G_2 = H_2 \cup \gamma_1[p_o,u'] \cup \mu[u',v'] \cup \gamma_1[v',p_1]$.

Adjoignons à H_1 et à G_2 la chaîne $\mu[p_o,v] \cup \gamma_1[v,p_1]$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 71) ne sont pas SP (P_o,P_1), (les arêtes de γ' dans le premier et celles de $\gamma_1[u',v]$ dans le second ne vérifient pas la condition nécessaire d'ELGOT et WRIGHT). Nous en déduisons que ni H_1' ni H_2' ne contiennent $\mu[p_o,v] \cup \gamma_1[v,p_1]$, ce qui contredit le fait que H_1' et H_2' forment un recouvrement de H'.

Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité, ce qui démontre la proposition (P_4).

Nous établirions de même les trois propositions suivantes :

(P'_4) Soient u',v' deux sommets de γ''_1 et u un sommet de $\mathring{\gamma}''_1$; u' précède v' sur γ_1.
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives u, P_1 et u', v', alors $u \in \gamma_1[x,u'] \cup \gamma_1[v',x']$.

(P''_4) Soient u', v' deux sommets de γ''_2 et v un sommet de $\mathring{\gamma}''_2$; u' précède v' sur γ_2.
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v', alors $v \in \gamma_2[y,u'] \cup \gamma_2[v',y']$.

(P'''_4) Soient u', v' deux sommets de γ''_2 et u un sommet de $\mathring{\gamma}''_2$; u' précède v' sur γ_2.
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives u, P_1 et u', v', alors $u \in \gamma_2[y,u'] \cup \gamma_2[v',y']$.

Propositions 5 -

(P_5) Soient u', v' deux sommets de γ et v un sommet de $\mathring{\gamma}$; u' précède v' lorsqu'on parcourt γ de x vers y (ce que nous notons $u' \underset{\gamma}{\leq} v'$).
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v', alors $v \in \gamma[x,u'] \cup \gamma[v',y]$.

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v' vérifiant $u' \underset{\gamma}{\leq} v \underset{\gamma}{\leq} v'$; nous distinguons deux cas selon que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide ou non.

1er cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v' - μ et $\nu = \mu[p_o,t] \cup \mu'[t,v']$ sont alors deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' (où v et v' sont deux sommets distincts de γ) et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\nu} \neq \emptyset$. Ceci est impossible en vertu de la proposition (P_3).

2ème cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$

Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'$ (figure 72) est inclus dans G et vérifie $(H') = 2$. Tout recouvrement $\{H'_1, H'_2\}$ de H' vérifie $H_1 \subset H'_1$ et $H_2 \subset H'_2$.

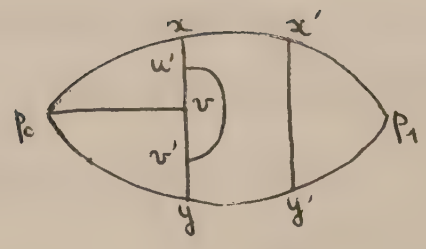


Fig. 72

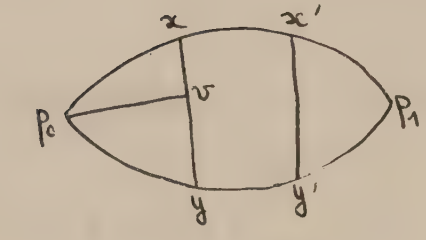
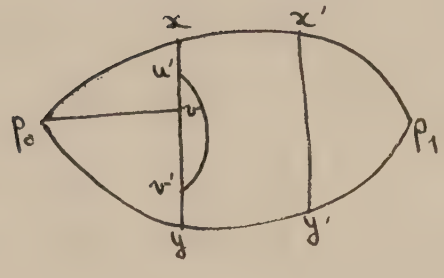


Fig. 73



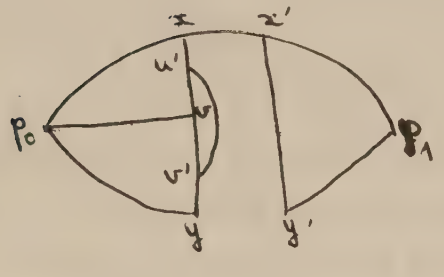


Fig. 74

Si l'on adjoint la chaîne $\mu_{[p_o,v]} \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de H' à H_1, le graphe obtenu (figure 73) n'est pas SP (P_o, P_1) (les arêtes de γ et de γ' ne vérifient pas la condition d'ELGOT et WRIGHT) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H_1' ; H_1' et H_2 formant un recouvrement de H', elle est contenue dans H_2'. Celui-ci contient alors le graphe $G_2 = H_2 \cup \mu_{[p_o,v]} \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$. Adjoignons à H_1 et à G_2 la chaîne $\mu_{[p_o,v]} \cup \gamma_{[v,v']} \cup \mu'_{[v',u']} \cup \gamma_{[u',x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 74) ne sont pas SP (P_o, P_1),(les arêtes de $\gamma_{[v,v']}$ n'y vérifient pas la condition d'ELGOT et WRIGHT). Nous en déduisons que ni H_1' ni H_2' ne contiennent $\mu_{[p_o,v]} \cup \gamma_{[v,v']} \cup \mu'_{[v',u']} \cup \gamma_{[u',x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ ce qui contredit le fait que H_1' et H_2' forment un recouvrement de H'. Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité, ce qui démontre la proposition (P_5).

Nous établirions de même la proposition suivante :

(P_5') [Soient u', v', deux sommets de γ' et v un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}'$; u' précède v' lorsqu'on parcourt γ' de x' vers y' (ce que nous notons $u' \underset{\gamma'}{\leq} v'$).
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_1, v et u', v' alors $v \in \gamma'_{[x',u']} \cup \gamma'_{[v',y']}$.

Notations -

Nous désignons par q_o^o, $q_o^1, \ldots, q_o^{ro} = x$ (resp. q_1^o, $q_1^1, \ldots, q_{1=x'}^{r1}$) les

sommets de $\gamma_1'' - \{x'\}$ (resp. $\gamma_1'' - \{x\}$) qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma_1'\}$ (resp. $M \cup \{\gamma_1'''\}$) dont l'autre extrémité est P_o (resp. P_1). L'indexation de ces sommets est telle que, lorsqu'on parcourt γ_1 de P_o vers P_1, nous les rencontrons dans l'ordre suivant : q_o^{ro}, q_o^{ro-1},...., q_o^1, q_o^o (resp. q_1^o, q_1^1,....,q_1^{r1}), ce que nous notons $q_o^{ro} \leq_{\gamma_1} q_o^{ro-1} \leq_{\gamma_1} \ldots q_o^1 \leq_{\gamma_1} q_o^o$ (resp. $q_1^o \leq_{\gamma_1} q_1^1 \ldots \leq_{\gamma_1} q_1^{r1}$). $x = q_o^{ro}, q_o^{ro+1}, \ldots, q_o^{so} = y$ (resp. $x' = q_1^{r1}, q_1^{r1+1}, q_1^{r1+2}, \ldots, q_1^{s1} = y'$) désignent les sommets de γ(resp. γ') qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma_1', \gamma_2'\}$ (resp. $M \cup \{\gamma_1''', \gamma_2'''\}$) dont l'autre extrémité est P_o (resp. P_1).

L'indexation de ces sommets est telle que, lorsqu'on parcourt γ(resp. γ') de x vers y (resp. de x' vers y'), nous les rencontrons dans l'ordre suivant : $q_o^{ro}, q_o^{ro+1}, q_o^{ro+2}, \ldots, q_o^{so}$, (resp. $q_1^{r1}, q_1^{r1+1}, q_1^{r1+2}, \ldots, q_1^{s1}$), ce que nous notons $q_o^{ro} \leq_{\gamma} q_o^{ro+1} \leq \ldots \leq_{\gamma} q_o^{so}$ (resp. $q_1^{r1} \leq_{\gamma'} q_1^{r1+1} \leq_{\gamma'} \ldots \ldots \leq_{\gamma'} q_1^{s1}$).

$y = q_o^{so}, q_o^{so+1}, q_o^{so+2}, \ldots q_o^{no}$ (resp. $y' = q_1^{s1}, q_1^{s1+1}, \ldots q_1^{n1}$) désignent les sommets de $\gamma_2'' - \{y'\}$ (resp. $\gamma_2'' - \{y\}$) qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma_2'\}$ (resp. $M \cup \{\gamma_2'''\}$)dont l'autre extrémité est P_o (resp. P_1. L'indexation de ces sommets est telle que, lorsqu'on parcourt γ_2 de P_o vers P_1, nous les rencontrons dans l'ordre suivant $q_o^{so}, q_o^{so+1}, \ldots q_o^{no}$ (resp. $q_1^{n1}, q_1^{n1-1}, \ldots, q_1^{s1}$), ce que nous notons $q_o^{so} \leq_{\gamma_2} q_o^{so+1} \leq_{\gamma_2} \ldots \leq_{\gamma_2} q_o^{no}$ (resp. $q_1^{n1} \leq_{\gamma_2} q_1^{n1-1} \leq_{\gamma_2} \ldots \leq_{\gamma_2} q_1^{s1}$).

Remarques -

1) r_o, r_1, s_o, s_1, n_o et n_1 vérifient les inégalités suivantes

$$0 \leq r_o \leq s_o \leq n_o \quad ; \quad 0 \leq r_1 \leq s_1 \leq n_1$$

2) Considérons un couple (i,j) quelconque de l'ensemble $\{0,\ldots r_o-1\} \times \{0,\ldots r_1 - 1\}$; q_o^i (resp. q_1^j) est extrémité d'une chaîne μ de M dont l'autre extrémité est P_o (resp. P_1) ; d'après la proposition (P_2), ces deux sommets vérifient donc $q_o^i \leq_{\gamma_1} q_1^j$. De même pour tout couple (i, j) de $\{s_o+1,\ldots,n_o\} \times \{s_1+1,\ldots, n_1\}$, nous avons $q_o^i < q_1^j$. D'où

$$q_o^{ro} \leq_{\gamma_1} q_o^{r_o-1} \leq_{\gamma_1} \ldots \leq_{\gamma_1} q_o^o < q_1^o < q_1^1 < q_1^2 < \ldots \leq_{\gamma_1} q_1^{r1}$$

$$q_o^{so} \leq_{\gamma_2} q_o^{so+1} \leq_{\gamma_2} q_o^{so+2} \leq_{\gamma_2} \ldots \leq_{\gamma_2} q_o^{no} \leq_{\gamma_2} q_1^{n1} \leq_{\gamma_2} q_1^{n1-1} \leq_{\gamma_2} \ldots \leq_{\gamma_2} q_1^{s1} .$$

Nous adoptons les notations suivantes :

$\forall_i \in \{o,\ldots n_o\}$, $i \neq r_o,s_o$, $\Psi_o^i = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ sont P_o et $q_o^i\}$

$\forall_i \in \{o,\ldots n_1\}$, $i \neq r_1,s_1$, $\Psi_1^i = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ sont P_1 et $q_1^i\}$

$\Psi_o^{r_o} = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ appartiennent à $\gamma_1'\}$

$\Psi_o^{s_o} = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ appartiennent à $\gamma_2'\}$

$\Psi_1^{r_1} = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ appartiennent à $\gamma_1'''\}$

$\Psi_1^{s_1} = \{\mu \in M$ / les extrémités de μ appartiennent à $\gamma_2'''\}$

$\forall_i \in \{1,\ldots,r_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu$ M/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_1'' et vérifient $q_o^i \underset{\gamma_1}{\leq} u \underset{\gamma_1}{\leq} v \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^{i-1}\}$

$\forall_i \in \{r_o+1,\ldots s_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ et vérifient $q_o^{i-1} \underset{\gamma}{\leq} u \underset{\gamma}{\leq} v \underset{\gamma}{\leq} q_o^i\}$

$\forall_i \in \{s_o+1,\ldots n_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_2'' et vérifient $q_o^{i-1} \underset{\gamma_2}{\leq} u \underset{\gamma_2}{\leq} v \underset{\gamma_2}{\leq} q_o^i\}$

$\forall_i \in \{1,\ldots\ldots r_1\}$, $\Phi_1^i = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_1'' et vérifient $q_1^{i-1} \underset{\gamma_1}{\leq} u \underset{\gamma_1}{\leq} v \underset{\gamma_1}{\leq} q_1^i\}$

$\forall_i \in \{r_1+1,\ldots s_1\}$, $\Phi_1^i = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ' et vérifient $q_1^{i-1} \underset{\gamma_2}{\leq} u \underset{\gamma_2}{\leq} v \underset{\gamma_2}{\leq} q_1^i\}$

$\forall_i \in \{s_1+1,\ldots n_1\}$, $\Phi_1^i = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_2'' et vérifient $q_1^i \underset{\gamma_2}{\leq} u \underset{\gamma_2}{\leq} v \underset{\gamma_2}{\leq} q_1^{i-1}\}$

$\Omega_1 = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_1'' et vérifient $q_o^o \underset{\gamma_1}{\leq} u \underset{\gamma_1}{\leq} v \underset{\gamma_1}{\leq} q_1^o\}$

$\Omega_2 = \{\mu \in M$/ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_2'' et vérifient $q_o^{n_o} \underset{\gamma_2}{\leq} u \underset{\gamma_2}{\leq} v \underset{\gamma_2}{\leq} q_1^{n_1}\}$

Conventions -

— Nous adoptons la même notation pour un ensemble de chaînes et le graphe constitué de la réunion des chaînes de cet ensemble.

Exemple : Φ_o^i désigne aussi le graphe $\bigcup_{\phi_o^i \in \Phi_o^i} \phi_o^i$; M désigne aussi le graphe $\bigcup_{\mu \in M} \mu$.

La figure 75 illustre la convention que nous venons d'exposer. Le graphe H y est représenté en pointillé et ϕ_o^i en trait plein.

- Etant donnés trois entiers m, n et p, $1 \leq m < n \leq p$, et une famille d'ensembles $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_p$, nous posons $\bigcup_{i=n}^{m} A_i = \emptyset$.

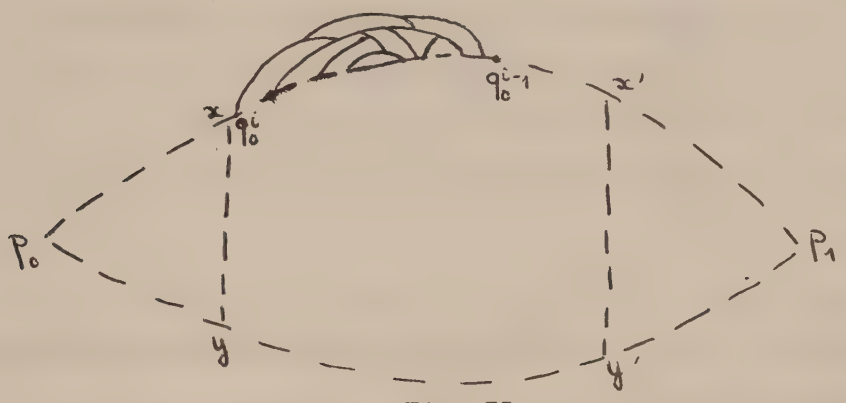


Fig. 75

La figure 75 bis illustre les notations de ce paragraphe. Nous y avons représenté en pointillé le graphe H, et en trait plein dix chaînes de M numérotées de 1 à 10.

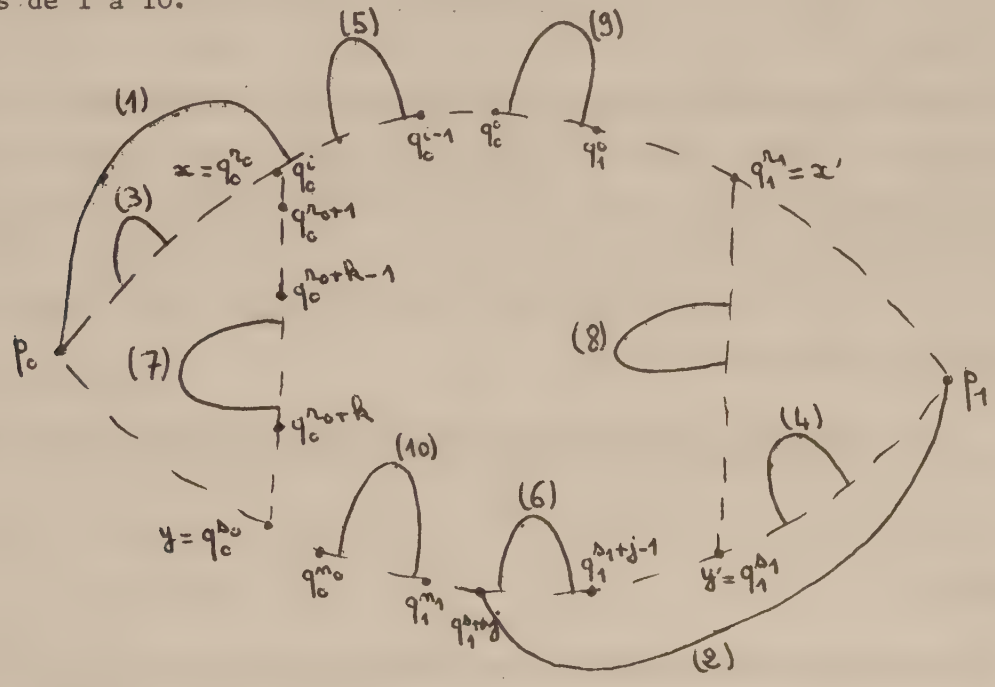


Fig. 75 bis

(1) est élément de Ψ_o^i

(2) est élément de $\Psi_1^{s_1+j}$

(3) est élément de $\Psi_o^{r_o}$

(4) " " $\Psi^{s_1}_1$

(5) " " Φ_o^i

(6) " " $\Phi^{s_1+j}_1$

(7) " " $\Phi_o^{r_o+k}$

(8) " " $\Phi^{r_1+\ell}_1$

(9) " " Ω_1

(10) " " Ω_2

Puisque G = H $\cup$ M, le tableau de la page 150 et les propositions 4 et 5 nous permettent d'écrire :

$$G = H \cup (\bigcup_{i=1}^{n_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_1} \Phi_1^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_1} \Psi_1^i) \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 .$$

Les ensembles de chaînes Φ_o^1, Φ_o^2,...., $\Phi_o^{n_o}$, Φ_1^1, ..., $\Phi_1^{n_1}$, Ψ_o^o,..., $\Psi_o^{n_o}$, Ψ_1^o,....., $\Psi_1^{n_1}$, Ω_1, Ω_2 sont disjoints et forment une partition de M.

Nous allons établir onze propriétés qui nous permettront d'affirmer que deux chaînes de M appartenant à 2 éléments distincts de la partition sont nécessairement disjointes (sauf, peut-être, en leurs extrémités). Pour cela, jusqu'à nouvel ordre, nous considérons Φ_o^1, Φ_o^2 ,...., $\Phi_o^{n_o}$, Φ_1^1, Φ_1^2 ,..., $\Phi_1^{n_1}$, Ψ_o^o ,..., $\Psi_o^{n_o}$, Ψ_1^o ,...., $\Psi_1^{n_1}$, Ω_1, Ω_2, non plus comme des graphes mais comme des ensembles de chaînes (sous-ensembles de M).

Nous résumerons les résultats obtenus dans le tableau de la page 174.

Propriétés 1 -

(PR_1) Pour tout couple d'indices (i, j), $1 \leq i \leq r_o$, $1 \leq j \leq r_o$, $i \neq j$; deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j, sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $1 \leq i < j \leq r_o$, tels qu'il existe deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Phi_o^i$, $\mu' \in \Phi_o^j$, $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soient u et v (resp. u' et v') les extrémités de μ (resp. de μ'). Elles vérifient les inégalités suivantes $u' \leqslant_{\gamma_1} v' \leqslant_{\gamma_1} q_o^i \leqslant_{\gamma_1} u \leqslant_{\gamma_1} v$.

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. Considérons une chaîne ψ_o^i de Ψ_o^i et la chaîne $\mu'_{[u',t]} \cup \mu_{[t,v]}$; ce sont deux éléments de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et u',v vérifiant : $q_o^i \in \mathring{\gamma}_1''$; $u', v \in \gamma_1''$; $u' \leqslant_{\gamma_1} q_o^i \leqslant_{\gamma_1} v$. Ceci est impossible, en vertu de la proposition (P_4). Nous aboutissons donc à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PR_1).

Utilisant respectivement les propositions (P_4'), (P_4'') et (P_4'''), nous démontrerions de même les trois propriétés suivantes :

(PR_1') Pour tout couple d'indices (i,j), $1 \leq i \leq r_1$, $1 \leq j \leq r_1$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_1^i et Φ_1^j sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

(PR_1'') Pour tout couple d'indices (i,j), $s_o+1 \leq i \leq n_o$, $s_o+1 \leq j \leq n_o$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR_1''') Pour tout couple d'indices (i,j), $s_1+1 \leq i \leq n_1$, $s_1+1 \leq j \leq n_1$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_1^i et Φ_1^j sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

Propriétés 2 -

(PR_2) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i$ et $(\bigcup_{j=1}^{r_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_1$ sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence d'un indice i, $1 \leq i \leq r_o$ et deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Phi_o^i$, $\mu' \in (\bigcup_{j=1}^{r_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_1$, $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

Soient u et v (resp. u' et v') les extrémités de μ (resp. de μ'). Elles vérifient les inégalités suivantes : $u < v \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^{i-1} \underset{\gamma_1}{\leq} u' < v'$. Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. Considérons une chaîne ψ_o^{i-1} de Ψ_o^{i-1} et la chaîne $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$; ce sont deux chaînes d'extrémités respectives P_o, q_o^{i-1} et u, v' vérifiant $q_o^{i-1} \in \overset{\circ}{\gamma}_1''$; u, v' $\in \gamma_1''$; $u \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^{i-1} \underset{\gamma_1}{\leq} v'$, ceci est impossible en vertu de la proposition (P_4). Nous aboutissons à une impossibilité et la propriété (PR_2) est démontrée.

Utilisant respectivement les propositions (P_4') , (P_4'') et (P_4''') nous démontrerions de même les trois propriétés suivantes.

(PR_2') Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\overset{r_o}{\underset{i=1}{\cup}} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $\overset{r_1}{\underset{j=1}{\cup}} \Phi_1^j$ sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

(PR_2'') Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\overset{n_o}{\underset{i=s_o+1}{\cup}} \Phi_o^i$ et $(\overset{n_1}{\underset{j=s_1+1}{\cup}} \Phi_1^j) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

(PR_2''') Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\overset{n_o}{\underset{i=s_o+1}{\cup}} \Phi_o^i) \cup \Omega_2$ et $\overset{n_1}{\underset{j=s_1+1}{\cup}} \Phi_1^j$ sont disjointes sauf peut- être en leurs extrémités.

Propriétés 3 -

(PR_3) Pour tout couple d'indices (i,j), $o \leq j < i \leq r_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Si μ et μ' ont P_o pour extrémité, (PR_3) n'est qu'une autre formalisation de la proposition (P_1). Si l'une des deux chaînes μ et μ' a ses deux extrémités distinctes de P_o, il s'agit nécessairement de la chaîne μ et i est égal à r_o ; l'une au moins des extrémités de μ appartient à $\overset{\circ}{\gamma}_1'$, soit u ce sommet ; j est nécessairement différent de r_o et μ' a donc pour extrémités P_o et q_o^j, sommet de $\overset{\circ}{\gamma}_1''$.

Supposons que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ soit non vide. Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers q_o^j. $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,q_o^j]}$ est alors une chaîne de M dont les extrémités u et q_o^j sont respectivement sommets de $\mathring{\gamma}'_1$ et de $\mathring{\gamma}''_1$; en nous reportant au tableau de la page 150, nous constatons que ceci est impossible. La propriété (PR_3) est ainsi démontrée.

Utilisant les propositions (P'_1) , (P''_1) et (P'''_1) nous démontrerions par un raisonnement analogue les trois propriétés suivantes :

(PR'_3) Pour tout couple d'indices (i,j), $o \leq j < i \leq r_1$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_1^i et Ψ_1^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR''_3) Pour tout couple d'indices (i,j), $s_o \leq i < j \leq n_o$ deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR'''_3) Pour tout couple d'indices (i,j), $s_1 \leq i < j \leq n_1$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_1^i et Ψ_1^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés 4 -

(PR_4) Pour tout couple d'indices (i,j), $o \leq i \leq r_o$, $o \leq j \leq r_1$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_1^j sont disjointes sauf peut- être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $0 \leq i \leq r_o$, $0 \leq j \leq r_1$ et de deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Psi_o^i$, $\mu' \in \Psi_o^j$, $\mu \cap \mu' \neq \emptyset$.

Si P_o et P_1 sont extrémités respectivement de μ et de μ', désignons par u l'extrémité de μ', distincte de P_1 ; soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u vers P_1 ; $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,P_1]}$ est une chaîne de M dont les extrémités sont P_o et P_1, ce qui est impossible d'après le tableau de la page 150 .

Si P_o n'est pas extrémité de μ (le raisonnement est identique si P_1 n'est pas extrémité de μ'), l'une au moins des extrémités de μ appartient à $\mathring{\gamma}'$, soit

u ce sommet. Soient u' et v' les extrémités de μ'. Puisque μ' appartient à Ψ_1^j, $0 \leq j \leq r_1$, u' et v' sont sommets de $\gamma_1''' \cup (\gamma'' - \{x\}) = \overset{\circ}{\gamma}_1'' \cup \overset{\circ}{\gamma}''' \cup \{x'\} \cup \{P_1\}$. Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v' ; $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$ est une chaîne de M dont les extrémités appartiennent respectivement à γ_1' et à $\gamma_1'' \cup \overset{\circ}{\gamma}_1''' \cup \{x'\} \cup \{P_1\}$, ce qui est impossible d'après le tableau de la page 150 .

Puisque, dans les deux cas, nous aboutissons à une impossibilité, la propriété (PR_4) est démontrée.

(PR_4') Nous démontrerions de même la propriété suivante.

Pour tout couple (i,j), $s_o \leq i \leq n_o$, $s_1 \leq j \leq n_1$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_1^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés 5 -

(PR_5) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i$ et $(\bigcup_{j=1}^{r_o} \Phi_o^j) \cup (\bigcup_{j=1}^{r_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_1$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence d'un indice i, $o \leq i \leq r_o$, et de deux chaînes μ et μ' vérifiant

$$\mu \in \Psi_o^i \ , \ \mu' \in (\bigcup_{j=1}^{r_o} \Phi_o^j) \cup (\bigcup_{j=1}^{r_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_1 \ , \ \overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}' \neq \emptyset \ .$$

Distinguons deux cas.

Premier cas : P_o est extrémité de μ.

L'une, au moins, des extrémités, soit u' de μ' est distincte de q_o^i . Soit v' l'autre extrémité de μ' et t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. μ et $\nu = \mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et P_o, u' vérifiant q_o^i, u' $\in \gamma_1''$ et $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\nu} \neq \emptyset$, ce qui contredit la proposition (P_1).

Deuxième cas : P_o n'est pas extrémité de μ. Dans ce cas $i = r_o$ et l'une, au moins, des extrémités, soit u, de μ appartient à $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$. Soient u' et v' les extrémités de μ' ; l'une d'entre elles est différente de x, nous admettrons que c'est u' (si c'est v' le raisonnement est évidemment le même) ; u' n'appartient pas à $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1 \cup \{x'\}$.

Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ est alors une chaîne de M dont les extrémités appartiennent respectivement à γ'_1 et $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1 \cup \{x'\}$ ce qui est impossible d'après le tableau de la page 150.

Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PR_5).

Nous démontrerions de même les propriétés suivantes :

(PR'_5) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i$ et $(\bigcup_{j=1}^{r_o} \Phi_o^j) \cup (\bigcup_{j=1}^{r_1} \Phi_i^j) \cup \Omega_1$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR''_5) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=o}^{n_o} \Psi_o^i$ et $(\bigcup_{j=s_o+1}^{n} \Phi_o^j) \cup (\bigcup_{j=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR'''_5) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=s_1}^{n_1} \Psi_1^i$ et $(\bigcup_{j=s_o+1}^{n} \Phi_o^j) \cup (\bigcup_{j=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^j) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés 6 -

(PR_6) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i < s_o$, $r_o+1 \leq j < s_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut- être en leurs extrémités.

(PR'_6) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_1+1 \leq i < s_1$, $r_1+1 \leq j < s_1$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_1^i et Ψ_1^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Les propositions (PR_6) et (PR'_6) ne sont respectivement qu'une autre formalisation des propositions (P_7) et $P'_7)$.

Propriétés 7 -

(PR_7) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i \leq s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$, $i \neq j$ deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $r_o+1 \leq i < j \leq s_o$ et de deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Phi_o^i$, $\mu' \in \Phi_o^j$ et $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

Soient u et v (resp. u' et v') les extrémités de μ (resp.μ'). Elles vérifient les inégalités suivantes $u \underset{\gamma}{\leq} v \underset{\gamma}{\leq} q_o^i \underset{\gamma}{\leq} u' \underset{\gamma}{\leq} v'$. Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$, rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. Considérons une chaîne ψ_o^i de Ψ_o^i et la chaîne $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$; ce sont deux éléments de M d'extrémités respectives p_o, q_o^i et u, v' vérifiant $u, v \in \gamma$; $q_o^i \in \mathring{\gamma}$; $u \underset{\gamma}{\leq} q_o^i \underset{\gamma}{\leq} v'$. Ceci est impossible en vertu de la proposition (P_5). Nous aboutissons donc à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PR_7).

Utilisant la proposition (P'_5) nous démontrerions de même la propriété (PR'_7).

(PR'_7) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_1+1 \leq i \leq s_1$, $r_1+1 \leq j \leq s_1$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_1^i et Φ_1^j, sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés 8 -

(PR_8) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i < s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $r_o+1 \leq i \leq s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$, et de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à Ψ_o^i et Φ_o^j et telles que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ ne soit pas vide. L'une, au moins, des extrémités, soit u', de μ' est distincte de q_o^i. Soit v' l'autre extrémité de μ' et t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on

parcourt μ' de v' vers u'. μ et $\nu = \mu_{[p_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et P_o, u' vérifiant q_o^i, $u' \in \gamma$ et $\mathring{\mu} \cap \mathring{\nu} \neq \emptyset$, ce qui contredit la proposition (P_3) et démontre donc la propriété (PR_8).

Utilisant la proposition (P_3'), nous démontrerions de même la propriété (PR_8').

(PR_8') Pour tout couple d'indices (i,j), $r_1+1 \leq i < s_1$, $r_1+1 \leq j \leq s_1$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_1^i et Φ_1^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés 9 -

(PR_9) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1}^{n_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à

$(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_1$ et

$(\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1}^{n_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_2$ et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

Les extrémités de μ (resp. de μ') sont des sommets de γ_1 (resp. de γ_2) et l'une d'entre elles, u (resp. u') est nécessairement distincte de P_o et de P_1.

$\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν de **M** d'extrémités u et u'. C'est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{P_o, P_1\} = \mathring{\gamma}_1' \cup \mathring{\gamma}_1'' \cup \mathring{\gamma}_1''' \cup \{x,x'\}$ à $\gamma_2 - \{P_o,P_1\} = \mathring{\gamma}_2' \cup \mathring{\gamma}_2'' \cup \mathring{\gamma}_2''' \cup \{y,y'\}$. D'après le tableau de la page 150, ceci n'est possible que si le couple de sommets (u,u') est égal à (x,y) ou à (x',y').

Soit v (resp. v') l'extrémité de μ (resp. de μ') distincte de u (resp. de u'). $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ étant non vide, il existe deux chaînes élémentaires ν_1 et ν_2

d'extrémités respectives u, v' et u', v qui soient réunions de sous-chaînes de μ et de μ'.

Si $(u,u') = (x,y)$, ν_1 est une chaîne de M reliant x à $\gamma_2 - \{y\} = \overset{\circ}{\gamma}{}'_2 \cup \overset{\circ}{\gamma}{}''_2 \cup \overset{\circ}{\gamma}{}'''_2 \cup \{y', p_o, p_1\}$. Le tableau de la page 150 nous permet alors d'affirmer que l'extrémité v' de ν_1 est nécessairement P_o. De même, puisque ν_2 est une chaîne de M reliant y à $\gamma_1 - \{x\} = \overset{\circ}{\gamma}{}'_1 \cup \overset{\circ}{\gamma}{}''_1 \cup \overset{\circ}{\gamma}{}'''_1 \cup \{x', p_o, p_1\}$, v est égal à P_o. Les deux chaînes μ et μ' de M ont pour extrémités respectives P_o. x et P_o, y, (x et y sont deux sommets distincts de γ) et vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}' \neq \emptyset$, ce qui contredit la proposition (P_3). Si $(u,v) = (x', y')$ un raisonnement analogue nous permet d'affirmer que μ et μ' ont pour extrémités respectives P_1, x' et P_1, y', (x' et y' sont deux sommets distincts de γ') et vérifient $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}' \neq \emptyset$. Ceci contredit la proposition (P'_3).

Dans les deux cas, nous aboutissons à une contradiction, ce qui démontre la propriété (PR_9).

Propriété 10 -

(PR_{10}) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i\right)$ et $\left(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1-1} \Psi_1^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1} \Phi_1^i\right)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à $\left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i\right)$ et $\left(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1-1} \Psi_1^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1} \Phi_1^i\right)$, et vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}' \neq \emptyset$.

L'une des extrémités, soit u (resp. u'), de μ (resp. μ') appartient à γ (resp. γ'). $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}'$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν de M d'extrémités u et u'. ν est donc un élément de M reliant γ à γ'. D'après le tableau de la page 150, ceci n'est possible que si le couple de sommets (u,u') est égal à (x,x') ou à (y,y').

Soit v (resp. v') l'extrémité de μ (resp. de μ') distincte de u (resp. u'). Si $(u,u') = (x, x')$, x est extrémité de μ et cette chaîne ne peut donc appartenir à $\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i$; nous en déduisons qu'elle appartient à $\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i$, ce qui

implique que v soit un sommet de γ. Comme, de plus, v est distinct de u = x, v appartient à $\overset{\circ}{\gamma} \cup \{y\}$. $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν' de M d'extrémités u' et v. ν' est donc un élément de M reliant x' à $\overset{\circ}{\gamma} \cup \{y\}$, ce qui est impossible d'après le tableau de la page 150.

Si (u,u') = (y, y') par un raisonnement analogue, nous construisons une chaîne ν'' de M reliant x à $\overset{\circ}{\gamma'} \cup \{y'\}$; d'après le tableau de la page 150, l'existence d'une telle chaîne est impossible.

Dans les deux cas nous aboutissons donc à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PR_{10}).

Propriété 11 -

(PR_{11}) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_1} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i)$ et vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$.

L'une des extrémités, soit u, de μ est un sommet de $\gamma_1 - \{P_o, P_1\}$. μ' ne peut avoir P_o et x pour extrémités ; en effet, cela signifierait que μ' appartient à $\Psi_o^{r_o}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Puisque les extrémités de μ' appartiennent à $\gamma \cup \{P_o\}$, nous en déduisons que l'une d'entre elles, nous la désignerons par u', appartient à $\gamma - \{x\} = \overset{\circ}{\gamma} \cup \{y\}$. $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν de M d'extrémités u et u'. ν est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{P_o, P_1\}$ à $\overset{\circ}{\gamma} \cup \{y\}$. D'après le tableau de la page 150, ceci n'est possible que si u = x. Soient v (resp. v') l'extrémité de μ (resp. μ') distincte de u (resp. u').

Puisque v et u' appartiennent respectivement à $\gamma_1 - \{x\}$ et $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$, ces deux sommets sont distincts. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ implique alors l'existence d'une sous-chaîne de μ et d'une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν' de M d'extrémités v et u'. ν' est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{x\} = \mathring{\gamma}_1' \cup \mathring{\gamma}_1'' \cup \mathring{\gamma}_1''' \cup \{x', P_o, P_1\}$ à $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$; le tableau de la page 150 nous indique qu'alors v ne peut être égal qu'à P_o.

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. μ et $\mu_{[v=p_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, x et P_o, u' ; u' appartenant à $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$, x et u' sont deux sommets distincts de γ. Comme en outre, t est un sommet intérieur à μ et à $\mu_{[p_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$, l'existence de ces deux chaînes contredit la proposition (P_3) et démontre ainsi la propriété (PR_{11}).

Nous démontrerions de même la propriété (PR''_{11}).

(PR''_{11}) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1}^{n_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_2$ et $(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

La proposition (P'_3) nous permettrait, par un raisonnement analogue, d'établir les propriétés (PR'_{11}) et (PR'''_{11}).

(PR'_{11}) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{r_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1} \Phi_1^i)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

(PR'''_{11}) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1}^{n_1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_1+1}^{n_1} \Phi_1^i) \cup \Omega_2$ et $(\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1-1} \Psi_1^i) \cup (\bigcup_{i=r_1+1}^{s_1} \Phi_1^i)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriété fondamentale -

> Deux chaînes quelconques μ et μ', appartenant à deux éléments distincts de la partition $\{\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{i_o}, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Phi_1^1, \ldots, \Phi_1^{i_1}, \Phi_1^{n_1}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{j_o}, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Psi_1^o, \ldots, \Psi_1^{j_1}, \ldots, \Psi_1^{n_1}, \Omega_1, \Omega_2\}$ de M sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

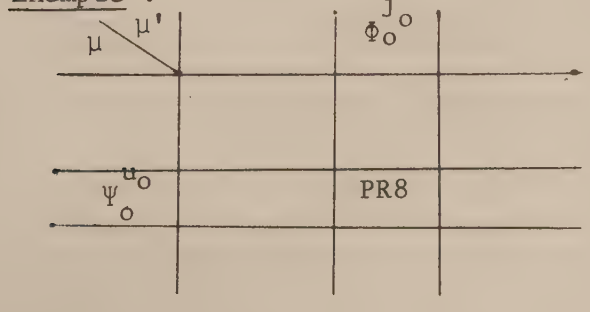
Cette propriété n'est qu'une autre formalisation des propriétés (numérotées de 1 à 11) que nous venons de démontrer. Pour nous en assurer, il nous suffit de considérer le tableau récapitulatif ci-dessous. A chaque ligne (resp. colonne) de celui-ci correspond l'un des éléments suivants : $\Phi_o^{i_o}$, $\Phi_o^{i'_o}$, $\Phi_o^{j_o}$, $\Phi_o^{j'_o}$, $\Phi_o^{k_o}$, $\Phi_o^{k'_o}$, $\Phi_1^{i_1}$, $\Phi_1^{i'_1}$, $\Phi_1^{j_1}$, $\Phi_1^{j'_1}$, $\Phi_1^{k_1}$, $\Phi_1^{k'_1}$, $\Psi_o^{t_o}$, $\Psi_o^{t'_o}$, $\Psi_o^{u_o}$, $\Psi_o^{u'_o}$, $\Psi_o^{v_o}$, $\Psi_o^{v'_o}$, $\Psi_1^{t_1}$, $\Psi_1^{t'_1}$, $\Psi_1^{u_1}$, $\Psi_1^{u'_1}$, $\Psi_1^{v_1}$, $\Psi_1^{v'_1}$, Ω_1, Ω_2.

Les indices i_o, i'_o, j_o, j'_o, k_o, k'_o, i_1, i'_1, j_1, j'_1, k_1, k'_1, t_o, t'_o, u_o, u'_o, v_o, v'_o, t_1, t'_1, u_1, u'_1, v_1, et v'_1 vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
i_o, i'_o \in \{1, r_o\} & ; \quad j_o, j'_o \in \{r_o+1, s_o\} & ; \quad k_o, k'_o \in \{s_o+1, n_o\} \ ; \\
i_1, i'_1 \in \{1, r_1\} & ; \quad j_1, j'_1 \in \{r_1+1, s_1\} & ; \quad k_1, k'_1 \in \{s_1+1, n_1\} \ ; \\
t_o, t'_o \in \{o, r_o\} & ; \quad u_o, u'_o \in \{r_o+1, s_o-1\} & ; \quad v_o, v'_o \in \{s_o, n_o\} \ ; \\
t_1, t'_1 \in \{o, r_1\} & ; \quad u_1, u'_1 \in \{r_1+1, s_1-1\} & ; \quad v_1, v'_1 \in \{s_1, n_1\} \ .
\end{array}$$

Il existe ainsi une bijection entre les cases du tableau et les différents types de couples formés de deux éléments distincts de $\{\Phi_o^1, \ldots \Phi_o^{n_o}, \Phi_1^1, \ldots, \Phi_1^{n_1}, \Psi_o^o, \ldots \Psi_o^{n_o}, \Psi_1^o, \ldots, \Psi_1^{n_1}, \Omega_1, \Omega_2\}$. Dans la case correspondante à un couple (A,B) de $\{\Phi_o^1, \ldots, \Phi_1^1, \ldots, \Phi_1^{n_1}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Psi_1^o, \ldots, \Psi_1^{n_1}, \Omega_1, \Omega_2\}^2$, nous indiquerons le nom de la propriété qui nous permet d'affirmer que deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à A et B sont disjointes sauf, peut-être, en leurs extrémités.

Exemple :



En effet, la propriété (PR_8) nous permet d'affirmer que deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à $\Psi_o^{u_o}$ et $\Phi_o^{j_o}$; $r_o+1 \leq u_o \leq s_o-1$; $r_o+1 \leq j_o \leq s_o$, sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

	$\Phi_0^{i_0}$	$\Phi_0^{i_0}$	$\Phi_0^{\delta_0}$	$\Phi_0^{\delta_0}$	$\Phi_0^{k_0}$	$\Omega_0^{k_0}$	$\Phi_1^{i_1}$	$\Phi_1^{i_1}$	$\Phi_1^{\delta_1}$	$\Phi_1^{\delta_1}$	$\Phi_1^{k_1}$	$\Phi_1^{k_1}$	$\Psi_0^{i_0}$
$\Phi_0^{i_0}$		PR1	PR11	PR11	PR9	PR9	PR2	PR2	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5
$\Phi_0^{i_0}$			PR11	PR11	PR9	PR9	PR2	PR2	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5
$\Phi_0^{\delta_0}$				PR7	PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11
$\Phi_0^{\delta_0}$					PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11
$\Phi_0^{k_0}$						PR"1	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"2	PR"2	PR9
$\Omega_0^{k_0}$							PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"2	PR"2	PR9
$\Phi_1^{i_1}$								PR'1	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5
$\Phi_1^{i_1}$									PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5
$\Phi_1^{\delta_1}$										PR'7	PR"11	PR"11	PR'11
$\Phi_1^{\delta_1}$											PR"11	PR"11	PR'11
$\Phi_1^{k_1}$												PR"1	PR9
$\Omega_1^{k_1}$													PR9
$\Psi_0^{i_0}$													
$\Psi_0^{i_0}$													
$\Psi_0^{\delta_0}$													
$\Psi_0^{\delta_0}$													
$\Psi_0^{k_0}$													
$\Psi_0^{k_0}$													
$\Psi_1^{i_1}$													
$\Psi_1^{i_1}$													
$\Psi_1^{\delta_1}$													
$\Psi_1^{\delta_1}$													
$\Psi_1^{k_1}$													
$\Psi_1^{k_1}$													

$\Psi_0^{t'0}$	Ψ_0^{w0}	Ψ_0^{w0}	Ψ_0^{y0}	Ψ_0^{y0}	Ψ_1^{t1}	$\Psi_1^{t'1}$	Ψ_1^{y1}	Ψ_1^{y1}	Ψ_1^{y1}	Ω_4	$\Omega_{4'}$
PR5	PR11	PR11	PR9	PR9	PR'5	PR'5	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR2	PR9
PR5	PR11	PR11	PR9	PR9	PR'5	PR'5	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR2	PR9
PR11	PR8	PR8	PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11	PR"11
PR11	PR8	PR8	PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11	PR"11
PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR"2
PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR"2
PR5	PR11	PR11	PR9	PR9	PR'5	PR'5	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR'2	PR9
PR5	PR11	PR11	PR9	PR9	PR'5	PR'5	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR'2	PR9
PR'11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR'11	PR'11	PR'8	PR'8	PR"11	PR"11	PR'11	PR"11
PR'11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR'11	PR'11	PR'8	PR'8	PR"11	PR"11	PR'11	PR"11
PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR"2
PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR"5	PR"5	PR9	PR"2
PR3	PR11	PR11	PR9	PR9	PR4	PR4	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5	PR9
	PR11	PR11	PR9	PR9	PR4	PR4	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR5	PR9
		PR6	PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11	PR"11
			PR"11	PR"11	PR11	PR11	PR10	PR10	PR"11	PR"11	PR11	PR"11
				PR"3	PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR'4	PR'4	PR9	PR"5
					PR9	PR9	PR"11	PR"11	PR'4	PR'4	PR9	PR"5
						PR'3	PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR'5	PR9
							PR'11	PR'11	PR9	PR9	PR'5	PR9
								PR'6	PR"11	PR"11	PR'11	PR"11
									PR"11	PR"11	PR'11	PR"11
										PR"5	PR9	PR"5
											PR9	PR"5

Corollaire -

Deux chaînes quelconques μ et μ', appartenant à deux éléments distincts de la partition $\{\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Phi_1^1, \ldots, \Phi_1^{n_1}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Psi_1^o, \ldots \Psi_1^{n_1}, \Omega_1, \Omega_2\}$ de M vérifient les trois conditions suivantes :

(i) $E(\mu \cap \mu') = \emptyset$

(ii) $|X(\mu \cap \mu')| \leq 2$

(iii) $X(\mu \cap \mu') \subset I = \{p_o, p_1\} \cup \{q_j^i / 0 \leq j \leq 1, 0 \leq i \leq n_j\}$

Notations -

Considérant maintenant $\Phi_o^1, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Phi_1^1, \ldots, \Phi_1^{n_1}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Psi_1^o, \ldots, \Psi_1^{n_1}$, Ω_1 et Ω_2 comme des graphes (cf. convention page 160), posons :

$$\bar{\Phi}_o^i = \begin{cases} \Phi_o^i \cup \gamma_1[q_o^{i-1}, q_o^i] , & 1 \leq i \leq r_o \\ \Phi_o^i \cup \gamma[q_o^{i-1}, q_o^i] , & r_o + 1 \leq i \leq s_o \\ \Phi_o^i \cup \gamma_2[q_o^{i-1}, q_o^i] , & s_o + 1 \leq i \leq n_o \end{cases}$$

$$\bar{\Phi}_1^i = \begin{cases} \Phi_1^i \cup \gamma_1[q_1^{i-1}, q_1^i] , & 1 \leq i \leq r_1 \\ \Phi_1^i \cup \gamma[q_1^{i-1}, q_1^i] , & r_1 + 1 \leq i \leq s_1 \\ \Phi_1^i \cup \gamma_2[q_1^{i-1}, q_1^i] , & s_1 + 1 \leq i \leq n_1 \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_o^i = \begin{cases} \Psi_o^i , & i \neq r_o, s_o \\ \Psi_o^i \cup \gamma_1[p_o, x] , & i = r_o \\ \Psi_o^i \cup \gamma_2[p_o, y] , & i = s_o \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_1^i = \begin{cases} \Psi_1^i , & i \neq r_1, s_1 \\ \Psi_1^i \cup \gamma_1[p_1, x'] , & i \neq r_1 \\ \Psi_1^i \cup \gamma_2[p_1, y'] , & i \neq s_1 \end{cases}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \gamma_1 \left[q_o^o,\ q_1^o\right]$$

$$\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \gamma_2 \left[q_o^{n_o},\ q_1^{n_1}\right]$$

Avec ces notations nous pouvons écrire :

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i\right) \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$$

G est donc la réunion de $k_G = n_o + n_1 + (n_o + 1) + (n_1 + 1) + 2 = 2\ (n_o + n_1 + 2)$ graphes.

D'après la définition de M, chacun de ces k_G graphes possède au moins deux sommets appartenant à la réunion des $k_G - 1$ autres. La propriété fondamentale et son corollaire nous permettent alors d'affirmer qu'il en possède exactement deux ; ces deux sommets sont éléments de I et seront appelés "extrémités" de ce graphe. (Rappelons que $I = \{p_o, p_1\} \cup \{q_j^i \mid 0 \leq j \leq 1,\ 0 \leq i \leq n_j\}$).

Ceci nous permet de représenter G par un graphe $\bar{G}$ dont l'ensemble de sommets est isomorphe à I (nous désignerons par le même symbole un sommet de G et l'élément de I qui lui est isomorphe) ; G possède k_G arêtes représentatives des k_G sous-graphes partiels dont la réunion forme G. Nous désignons par le même symbole une arête de $\bar{G}$ et le sous-graphe partiel de G qu'elle représente. Dans ces conditions les mêmes symboles désignent les "extrémités" de l'un des k_G sous-graphes partiels de G et, d'autre part, les extrémités de l'arête de $\bar{G}$ qui est représentative de ce sous-graphe partiel. Le graphe $\bar{G}$ est représenté à la figure 76.

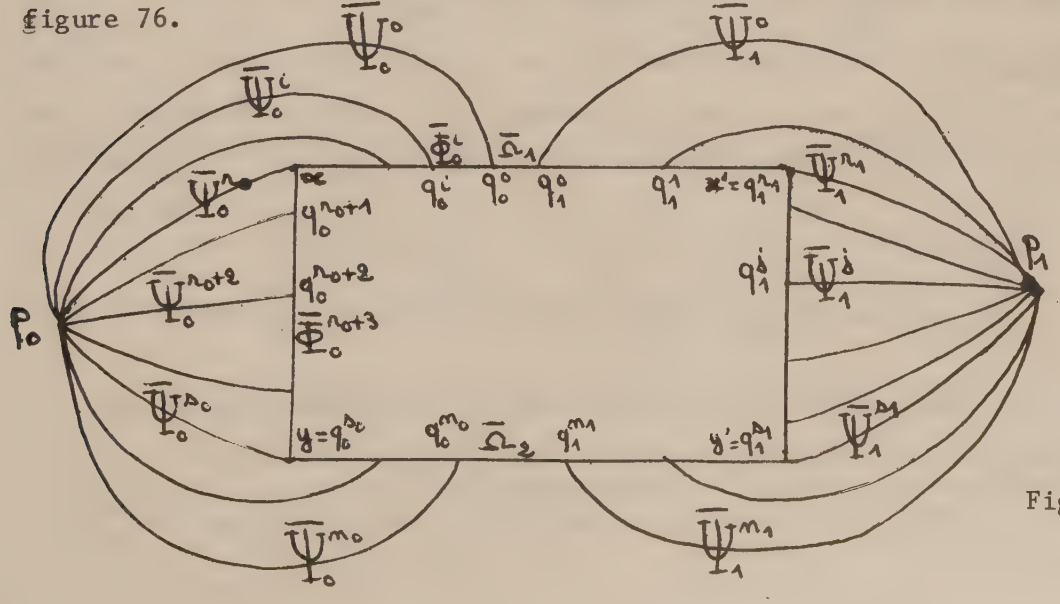


Fig. 76

Nous allons poursuivre notre caractérisation de G en considérant un recouvrement de ce graphe par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1), ce qui est légitime puisque, par hypothèse, $\sigma(G)$ égale 2.

Remarque 1 -

Rappelons que, puisque G est un bloc, il ne possède pas de sommets isolés et chacune des arêtes de ce graphe est contenue dans une chaîne élémentaire de G joignant P_o et P_1. Nous en déduisons que, dans chacun des k_G graphes dont la réunion forme G, toute arête est contenue dans une chaîne élémentaire joignant les"extrémités" du graphe. En outre, aucun de ces k_G graphes ne possède de sommets isolés.

Remarque 2 -

Puisque G contient H, le recouvrement de G considéré est constitué de deux graphes G'_1 et G'_2 contenant respectivement H_1 et H_2. (H_1 et H_2 désignant comme précédemment les deux graphes qui constituent l'unique recouvrement de H par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) ; ces deux graphes sont représentés à la figure 77).

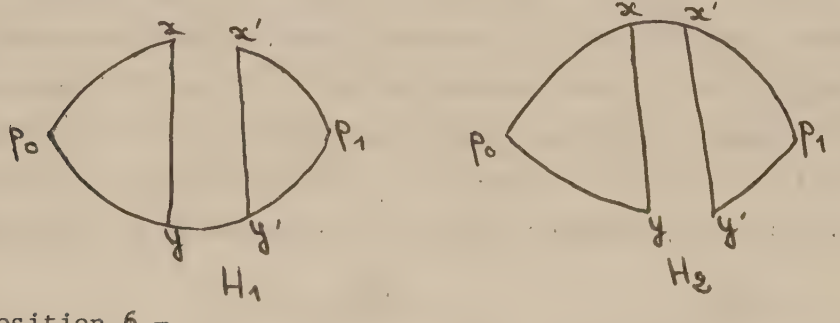


Fig. 77

Proposition 6 -

Les graphes $G_1 = (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i) \cup \bar{\Omega}_2$ et $G_2 = (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i) \cup \bar{\Omega}_1$ sont respectivement contenus dans G'_1 et G'_2.

La démonstration de cette proposition comporte six parties.

1) - Considérons un graphe $\bar{\Phi}_o^i$ d'extrémités q_o^{i-1} et q_o^i, $1 \leq i \leq n_o$.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités q_o^{i-1} et q_o^i. Soient ψ_o^o et $\psi_o^{n_o}$ deux chaînes d'extrémités respectives P_o, q_o^o et P_o, $q_o^{n_o}$ et appartenant respectivement aux ensembles $\bar{\Psi}_o^o$ et $\bar{\Psi}_o^{n_o}$. La chaîne $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o,\, q_o^{i-1}]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, y']} \cup \gamma_2[y', p_1]$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 78 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_2 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o,\, q_o^{i-1}]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, y']} \cup \gamma_2[y', p_1]$, n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne et, à fortiori ν, est donc contenue dans G_1'.

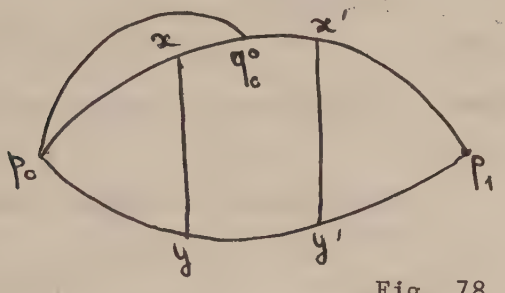


Fig. 78

Considérons la chaîne élémentaire $\psi_o^{n_o} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{n_o},\, q_o^i]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{i-1}, x']} \cup \gamma_1[x', p_1]$ de G. La figure 79 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_1. Ce graphe n'étant pas SP (P_o, P_1), nous en déduisons que $\psi_o^{n_o} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{n_o},\, q_o^i]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{i-1}, x']} \cup \gamma_1[x', p_1]$ et, à fortiori ν, est contenue dans G_2'. Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Phi}_o^i$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1' et G_2'. La remarque 1 nous permet alors de conclure que pour tout indice i, $1 \leq i \leq n_o$, $\bar{\Phi}_o^i$ est contenue dans G_1' et G_2' ; ces deux graphes contiennent donc $\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i$.

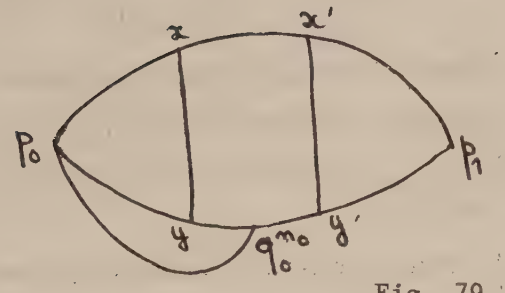


Fig. 79

2) - Considérons un graphe $\bar{\Phi}_1^i$ d'extrémités q_1^{i-1} et q_1^i, $1 \leq i \leq n_1$.

Dans ce graphe soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités q_1^{i-1} et q_1^i. Soient ψ_1^o et $\psi_1^{n_1}$ deux chaînes d'extrémités respectives P_o, q_1^o et P_o, q_o^{n1} et appartenant respectivement aux ensembles $\bar{\Psi}_1^o$ et $\bar{\Psi}_1^{n_1}$. La chaîne

$\gamma_2 [p_o, y] \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [y, q_1^i] \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_o^{i-1}, q_1^o] \cup \psi_1^o$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 80 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_2 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_2 [p_o, x] \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [y, q_1^i] \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_1^{i-1}, q_1^{n_1}] \cup \psi_1^o$

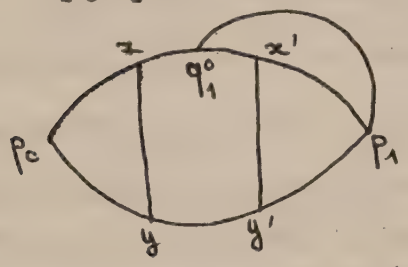


Fig. 80

n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G_1'.

Considérons la chaîne élémentaire $\gamma_1 [p_o, q_o^i] \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_o^o, q_1^{i-1}] \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_1^i, q_1^{n_1}] \cup \psi_1^{n_1}$ de G. La figure 81 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_1. Ce graphe n'étant pas SP (P_o, P_1), nous en déduisons que $\gamma_1 [p_o, x] \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_1^o, q_1^{i-1}] \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'') [q_1^i, q_1^{n_1}] \cup \psi_1^{n_1}$

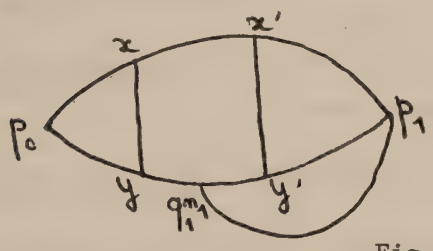


Fig. 81

et, à fortiori ν, est contenue dans G_2'. Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Phi}_1^i$, dont les extrémités sont les "extrémités de ce graphe, est contenue dans G_1' et G_2'. La remarque 1 nous permet alors de conclure que, pour tout indice i, $1 \leq i \leq n_1$, $\bar{\Phi}_1^i$ est contenue dans G_1' et G_2' ; ces deux graphes contiennent donc $\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i$.

3) Considérons un graphe $\bar{\Psi}_o^i$ d'extrémités P_o et q_o^i, $1 \leq i \leq n_o$. Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités P_o et q_o^i. La chaîne $\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'') [q_o^i, y'] \cup \gamma_2 [y', p_1]$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 82 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_2 (nous distinguons trois cas de figures selon la valeur de i) ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que

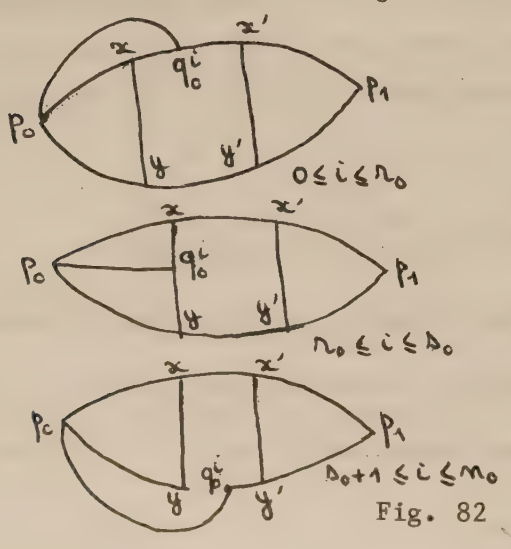


Fig. 82

$\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, y']} \cup \gamma_{2[y', p_1]}$ n'est pas contenue dans G_2'. Cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G_1'.

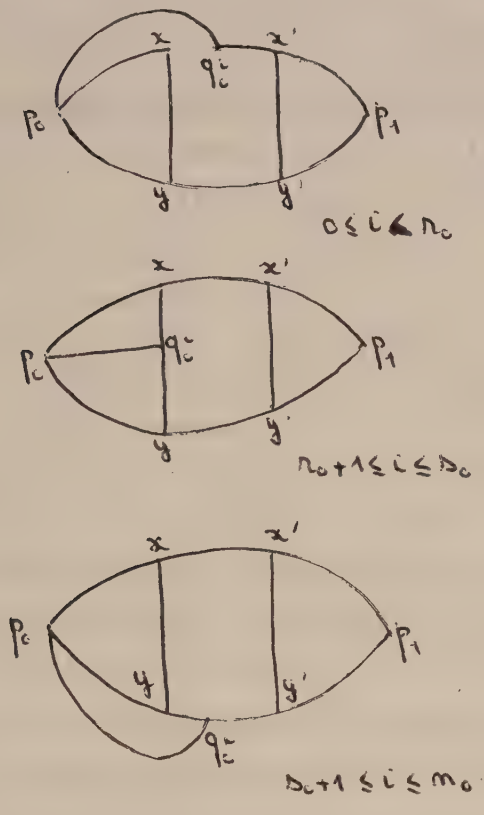


Fig. 83

Considérons la chaîne élémentaire $\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, x']} \cup \gamma_{1[x', p_1]}$ de G. La figure 83 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_1 (nous distinguons trois cas de figures selon la valeur de i) ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, x']} \cup \gamma_{1[x', p_1]}$, et à fortiori ν, est contenue dans G_2'.

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Psi}_o^i$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1' et G_2'. La remarque 1 nous permet alors de conclure que, pour tout indice i, $o \leq i \leq n_o$, $\bar{\Psi}_o^i$ est contenue dans G_1' et G_2' ; ces deux graphes contiennent donc $\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i$.

4) Considérons un graphe $\bar{\Psi}_1^i$ d'"extrémités" P_1 et q_1^i, $o \leq i \leq n_1$. Soit ν, une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités P_1 et q_1^i. La chaîne $\gamma_{2[p_o, y]} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[y, q_1^i]} \cup \nu$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 84 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_2 (nous distinguons trois cas de figures selon la valeur de i) ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{2[p_o, y]} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[y, q_1^i]} \cup \nu$ n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne, et à

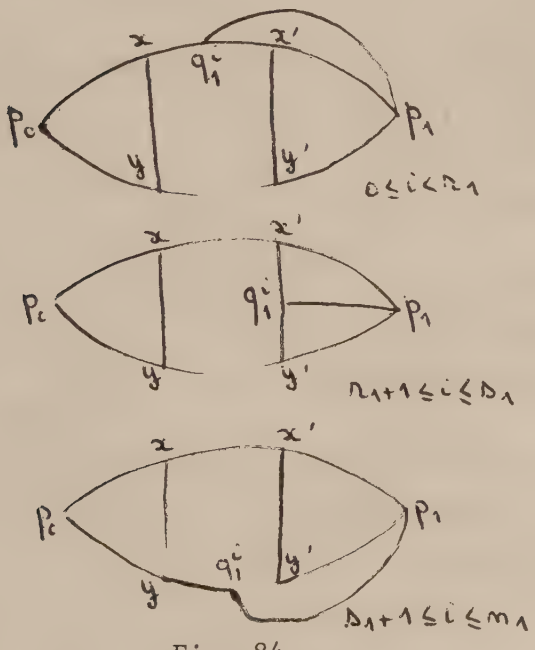


Fig. 84

fortiori ν , est donc contenue dans G'_1.

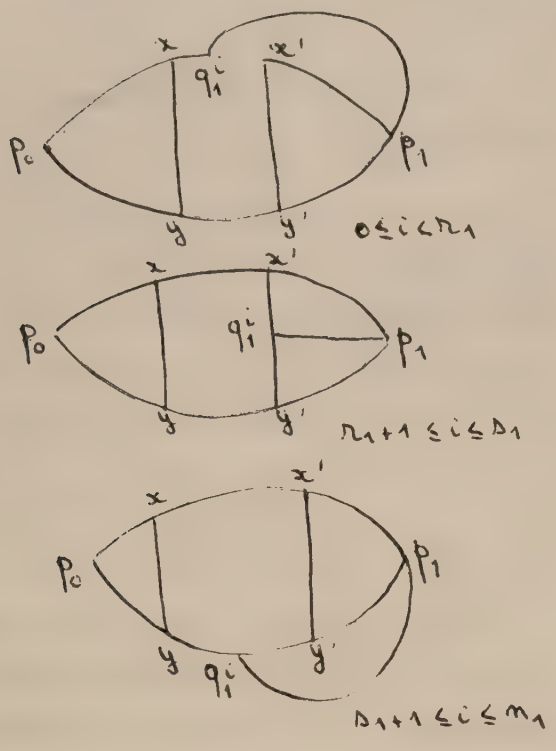


Fig. 85

Considérons la chaîne élémentaire $\gamma_{1\,[p_o,x]} \cup (\gamma''_1 \cup \gamma' \cup \gamma''_2)_{[x,q_1^i]} \cup \nu$ de G. La figure 85 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_1 (nous distinguons trois cas de figures selon la valeur de i). Ce graphe n'étant pas SP (P_o, P_1), nous en déduisons que $\gamma_{1\,[p_o,x]} \cup (\gamma''_1 \cup \gamma' \cup \gamma''_2)_{[x,q_1^i]} \cup \nu$, et à fortiori ν , est contenue dans G'_2. Nous avons démontré ainsi que toute chaîne de $\bar{\Psi}_1^i$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G'_1 et G'_2. La remarque 1 nous permet alors de conclure que, pour tout indice i, $o \le i \le n_1$, $\bar{\Psi}_1^i$ est contenue dans G'_1 et G'_2 ; ces deux graphes contiennent donc $\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i$.

5) Considérons le graphe $\bar{\Omega}_1$ d'extrémités q_o^o et q_1^o.

Dans ce graphe, soit ν , une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités q_o^o et q_1^o. La chaîne $\gamma_{1\,[p_o,q_o^o]} \cup \nu \cup \gamma_{1\,[q_1^o,p_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2. La figure 86 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_1 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{1\,[p_o,q_o^o]} \cup \nu \cup \gamma_{1\,[q_1^o,p_1]}$ n'est pas contenue dans G'_1 ; cette chaîne, et à fortiori ν , est donc contenue dans G'_2.

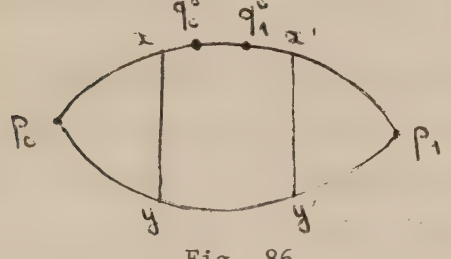


Fig. 86

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Omega}_1$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G'_2. La remarque 1 nous permet alors de conclure que $\bar{\Omega}_1$ est contenu dans G'_2.

6) Considérons le graphe $\bar{\Omega}_2$ d'extrémités $q_o^{n_o}$ et $q_1^{n_1}$.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités $q_o^{n_o}$ et $q_1^{n_1}$. La chaîne $\gamma_{2\,[p_o, q_o^{n_o}]} \cup \nu \cup \gamma_{2\,[q_1^{n_1}, p_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 87 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de H_2 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{2\,[p_o, q_o^{n_o}]} \cup \nu \cup \gamma_{2\,[q_1^{n_1}, p_1]}$ n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne, et a fortiori ν, est donc contenue dans G_1'.

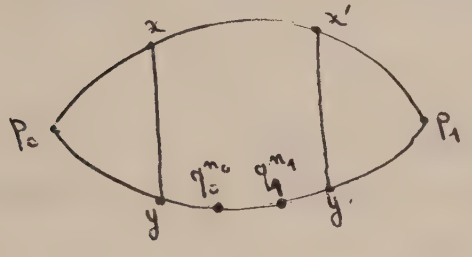


Fig. 87

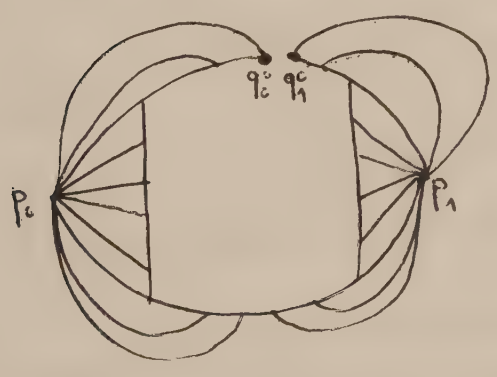
Nous avons démontré que toute chaîne de $\bar{\Omega}_2$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1'. La remarque 1 nous permet alors de conclure que $\bar{\Omega}_2$ est contenu dans G_1'.

Les six paragraphes précédents démontrent bien que G_1' et G_2' contiennent respectivement les graphes

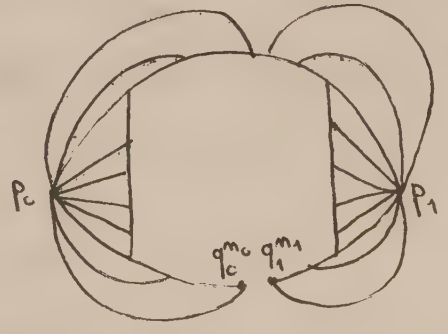
$$G_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i\right) \cup \bar{\Omega}_2 \quad \text{et}$$

$$G_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{\Phi}_1^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_1} \bar{\Psi}_1^i\right) \cup \bar{\Omega}_1 .$$

Nous avons représenté le graphe G par le graphe $\bar{G}$ de la figure 76 ; G_1 et G_2 étant des sous-graphes partiels de G, nous pouvons les représenter par les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ correspondants (cf. figure 88).



$\bar{G}_1$



$\bar{G}_2$

Fig. 88

G_1 (resp. G_2) est un sous-graphe partiel connexe de G'_1 (resp. G'_2), tel que, par chacune de ses arêtes, passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme, en outre, G'_1 et G'_2 sont SP (P_o, P_1), nous en déduisons qu'il en est de même de G_1 et de G_2. Nous vérifions que $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ forment un recouvrement de $\bar{G}$ par deux graphes SP (P_o, P_1) ce qui nous permet d'affirmer que les deux graphes SP (P_o, P_1) G_1 et G_2 forment un recouvrement de G.

Proposition 7 -

Le graphe G vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) Pour tout indice i, $1 \leq i \leq n_o$ (resp. $1 \leq i \leq n_1$), le sous-graphe partiel $\bar{\Phi}_o^i$ (resp. $\bar{\Phi}_1^i$) est SP (q_o^{i-1}, q_o^i) (resp. SP (q_1^{i-1}, q_1^i)).
(ii) Pour tout indice i, $o \leq i \leq n_o$ (resp. $o \leq i \leq n_1$), le sous-graphe partiel $\bar{\Psi}_o^i$ (resp. $\bar{\Psi}_1^i$) est SP (P_o, q_o^i) (resp. SP (q_1^i, p_1)).
(iii) $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) est SP (q_o^o, q_1^o) resp. SP $(q_o^{n_o}, q_1^{n_1})$.

Démontrons la propriété (i). Soient ψ_o^o et ψ_1^o deux chaînes d'extrémités respectives p_o, q_o^o et q_1^o, p_1, et appartenant respectivement aux ensembles $\bar{\Psi}_o^o$ et $\bar{\Psi}_1^o$.

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]} \cup \bar{\Phi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ et

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_1^i]} \cup \bar{\Phi}_1^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_1^{i-1}, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ sont deux sous-graphes partiels connexes de G_1, tels que par chacune de leurs arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme, en outre, G_1 est SP (P_o, P_1), ces deux sous-graphes partiels sont SP (P_o, P_1). Mais puisque $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]} \cup \bar{\Phi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ est la connection en série des deux chaînes élémentaires

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]}$, $(\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ et du graphe $\bar{\Phi}_o^i$

(resp. $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_1^i]} \cup \bar{\Phi}_1^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_1^{i-1}, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ est la

connection en série des deux chaînes élémentaires

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_1^i]}$, $(\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[q_1^{i-1}, q_1^o]} \cup \psi_1^o$ et du graphe $\bar{\Phi}_1^i$,

nous en déduisons que $\bar{\Phi}_o^i$ (resp. $\bar{\Phi}_1^i$) est SP (q_o^{i-1}, q_o^i) (resp. SP (q_1^{i-1}, q_1^i)).

Démontrons la propriété (ii).

$\bar{\Psi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, x']} \cup \gamma_1'''$ et $\gamma_1' \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[x, q_1^i]} \cup \bar{\Psi}_1^i$ sont deux sous-graphes partiels connexes de G_2, tels que par chacune de leurs arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme, en outre, G_2 est SP (P_o, P_1), ces deux sous-graphes partiels sont SP (P_o, P_1). Mais puisque $\bar{\Psi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, x']} \cup \gamma_1'''$ est la connection en série du graphe $\bar{\Psi}_o^i$ et de la chaîne $(\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, x']} \cup \gamma_1'''$ (resp. $\gamma_1' \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[x, q_1^i]} \cup \bar{\Psi}_1^i$) est la connection en série de la chaîne $\gamma_1' \cup (\gamma_1'' \cup \gamma' \cup \gamma_2'')_{[x, q_1^i]}$ et du graphe $\bar{\Psi}_1^i$), nous en déduisons que $\bar{\Psi}_o^i$ (resp. $\bar{\Psi}_1^i$) est SP (P_o, q_o^i) (resp. SP (q_1^i, P_1)).

Démontrons enfin la propriété (iii).

$\gamma_{1[P_o, q_o^o]} \cup \bar{\Omega}_1 \cup \gamma_{1[q_1^o, P_1]}$ (resp. $\gamma_{2[P_o, q_o^{n_o}]} \cup \bar{\Omega}_2 \cup \gamma_{2[q_1^{n_1}, P_1]}$) est un sous-graphe partiel de G_2 (resp. de G_1), tel que par chacune de ses arêtes il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme, en outre, G_1 et G_2 sont SP (P_o, P_1), ces deux sous-graphes partiels sont SP (P_o, P_1). Mais, puisque $\gamma_{1[P_o, q_o^o]} \cup \bar{\Omega}_1 \cup \gamma_{1[q_1^o, P_1]}$ est la connection en série des deux chaînes $\gamma_{1[P_o, q_o^o]}$, $\gamma_{1[q_1^o, P_1]}$ et du graphe $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\gamma_{2[P_o, q_o^{n_o}]} \cup \bar{\Omega}_2 \cup \gamma_{2[q_1^{n_1}, P_1]}$ est la connection en série des deux chaînes $\gamma_{2[P_o, q_o^{n_o}]}$, $\gamma_{2[q_1^{n_1}, P_1]}$ et du graphe $\bar{\Omega}_2$, nous en déduisons que $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) est SP (q_o^o, q_1^o) (resp. SP $(q_o^{n_o}, q_1^{n_1})$).

La troisième partie nous conduit donc à énoncer le théorème suivant :

Théorème fondamental -

Si l'indice n, défini à la page 138, est égal à 2, alors il existe des entiers r_o, r_1, s_o, s_1, n_o, n_1 ($0 \leq r_o < s_o \leq n_o$; $0 \leq r_1 < s_1 \leq n_1$) tels que G soit représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 76 ; cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente un sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u,v) de G. Nous pouvons en outre exhiber un recouvrement $\{G_1, G_2\}$ de G par deux sous-graphes partiels de G ; à G_1 et G_2 correspondent, dans la représentation définie ci-dessus, les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ de $\bar{G}$, représentés à la figure 88.

Réciproquement, il est clair qu'un graphe G, vérifiant ces conditions, est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

- IV - QUATRIEME PARTIE

Dans cette partie, nous supposons donc que n soit égal à 1.

Cela signifie que G contient, outre γ_1 et γ_2, une chaîne élémentaire γ unique vérifiant $\overset{\circ}{\gamma} \cap H = \emptyset$, dont les extrémités sont un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}_1$ et un sommet de $\overset{\circ}{\gamma}_2$.

Soit x (resp. y) l'extrémité de γ qui appartient à $\overset{\circ}{\gamma}_1$ (resp. à $\overset{\circ}{\gamma}_2$) et H le sous-graphe partiel de G constitué de γ_1, γ_2 et γ; $H = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ est représenté à la figure 89.

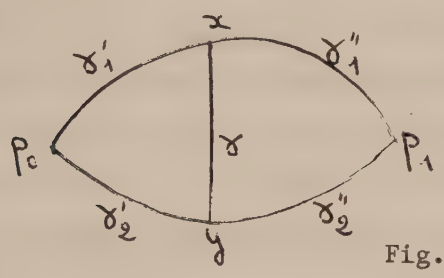
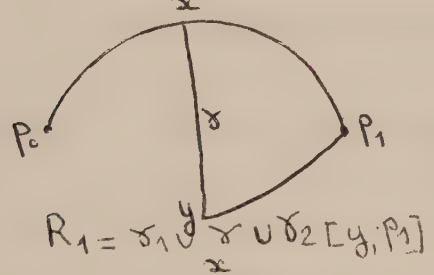


Fig. 89

H étant connexe, $\sigma(H)$ est strictement positif. Par toute arête de H, nous vérifions qu'il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_0 et P_1 ; H ne peut donc avoir un invariant $\sigma(H)$ égal à 1 que s'il est SP (P_0, P_1), ce qui n'est pas le cas ; d'où $\sigma(H) = 2$. Comme H est un sous-graphe partiel de G et que $\sigma(G) = 2$, nous en déduisons que $\sigma(H) = 2$.

Posons $\gamma'_1 = \gamma_{1\,[P_0,x]}$; $\gamma''_1 = \gamma_{1\,[x,P_1]}$; $\gamma'_2 = \gamma_{2\,[P_0,y]}$; $\gamma''_2 = \gamma_{2\,[y,P_1]}$.

Nous avons déjà remarqué (cf. page 123) que H possède deux recouvrements de cardinal 2 : le recouvrement R constitué des deux graphes R_1 et R_2 (figure 90) et le recouvrement R' constitué des deux graphes R'_1 et R'_2 (figure 91).



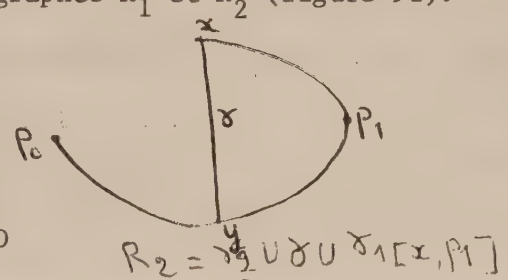
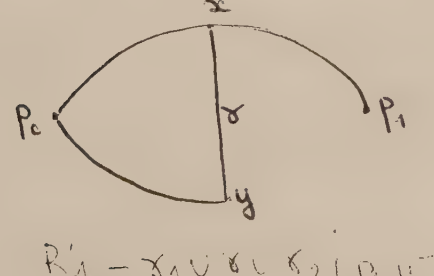


Fig. 90



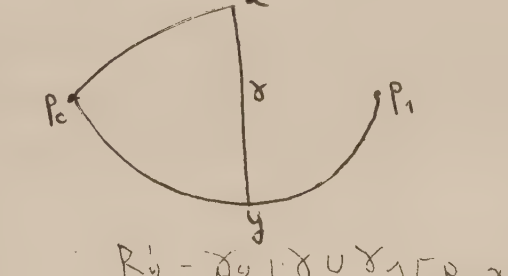


Fig. 91

G étant un bloc, toute arête e de G est contenue dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 ; soit μ la sous-chaîne maximale de celle-ci qui contient e et dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à H. Les extrémités de μ sont distinctes et appartiennent à H. G est la réunion de H et de toutes les chaînes élémentaires μ de G d'extrémités u et v vérifiant $u \neq v$; $u, v \in X(H)$; $\mathring{\mu} \cap H \neq \emptyset$, $\mu \cap H = \{u, v\}$.

Soit M l'ensemble de ces chaînes μ.

Considérons une chaîne μ de M et résumons dans un tableau les différentes positions que peuvent prendre, dans H, les extrémités u et v de μ. Pour le construire, nous utilisons les résultats de la partie I et le fait que n = 1.

Chaque ligne (resp. colonne) de celui-ci correspond à un sous-graphe partiel de H auquel pourrait éventuellement appartenir l'extrémité u (resp. v) de μ. Chaque case du tableau correspond donc à une position éventuelle du couple (u, v). u et v jouant des rôles symétriques, ce tableau est triangulaire ; comme μ est élémentaire, nous ne tenons pas compte des cases correspondant à $u \supset v = x$, $u = v = y$, $u = v = P_o$ et $u = v = P_1$.

Dans toute case du tableau nous inscrirons "non" si le couple (u, v) ne peut avoir la position correspondant à cette case ; nous inscrirons "oui" si la position du couple (u,v) correspondant à cette case est compatible avec l'hypothèse $\sigma(G) = 2$.

Exemple -

u \ v		x	y
$\mathring{\gamma}''_2$		non	oui

u \ v	$\overset{\circ}{\gamma}'_1$	$\overset{\circ}{\gamma}''_1$	$\overset{\circ}{\gamma}'_2$	$\overset{\circ}{\gamma}''_2$	x	y	p_o	p_1	$\overset{\circ}{\gamma}$
$\overset{\circ}{\gamma}'_1$	OUI	NON	NON	NON	OUI	NON	OUI	OUI	NON
$\overset{\circ}{\gamma}''_1$		OUI	NON	NON	OUI	NON	OUI	OUI	NON
$\overset{\circ}{\gamma}'_2$			OUI	NON	NON	OUI	OUI	OUI	NON
$\overset{\circ}{\gamma}''_2$				OUI	NON	OUI	OUI	OUI	NON
x						OUI	OUI	OUI	OUI
y							OUI	OUI	OUI
p_o								NON	OUI
p_1									OUI
$\overset{\circ}{\gamma}$									OUI

Proposition préliminaire -

Si nous posons :

$$A = \{\mu \in M/u = p_o,\ v \in \overset{\circ}{\gamma}''_1\} \cup \{\mu \in M/u = p_o,\ v \in \overset{\circ}{\gamma}''_2\} \cup \{\mu \in M/u = p_o,\ v \in \overset{\circ}{\gamma}\}$$

$$B = \{\mu \in M/u \in \overset{\circ}{\gamma}'_1,\ v = p_1\} \cup \{\mu \in M/u \in \overset{\circ}{\gamma}'_2,\ v = p_1\} \cup \{\mu \in M/u \in \overset{\circ}{\gamma},\ v = p_1\}$$

alors l'un au moins des deux ensembles A et B est vide.

Pour établir cette proposition, démontrons les deux lemmes suivants :

Lemme 1 - Soit H' un sous-graphe partiel de G, contenant H et une chaîne de A. Alors tout recouvrement de cardinal 2 de G est constitué par un sous-graphe partiel contenant R'_1 et un sous-graphe partiel contenant R'_2;

Lemme 2 - Soit H' un sous-graphe partiel de G, contenant H et une chaîne de B. Alors tout recouvrement de cardinal 2 de G est constitué par un sous-graphe partiel contenant R_1 et un sous-graphe partiel contenant R_2.

Démonstration de lemme 1 -

Puisque H' contient H, tout recouvrement de G recouvre en particulier H. Nous en déduisons que tout recouvrement de cardinal 2 de G est constitué de deux graphes H'_1 et H'_2 vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) $R_1 \subset H'_1$ $\qquad$ $R_2 \subset H'_2$

(ii) $R'_1 \subset H'_1$ $\qquad$ $R'_2 \subset H'_2$

Par hypothèse, H' contient une chaîne μ de M dont les extrémités sont $u = P_o$ et un sommet v de $\overset{\circ}{\gamma}''_1 \cup \overset{\circ}{\gamma}''_2 \cup \overset{\circ}{\gamma}$.

1er cas : $v \in \overset{\circ}{\gamma}''_1$.

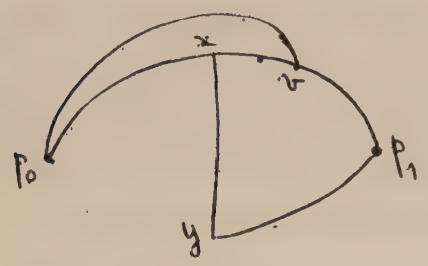
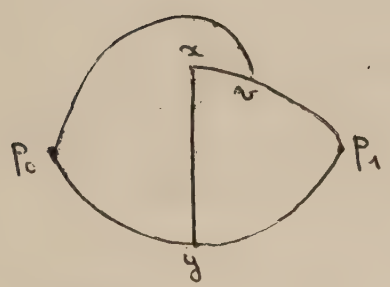


Fig. 92

Supposons $R_1 \subset H'_1$ et $R_2 \subset H'_2$. Considérons la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma \cup \gamma_2[y,p_1]$ de G. Si l'on adjoint cette chaîne aux graphes R_1 et R_2, les graphes obtenus (figure 92) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; puisque H'_1 et H'_2 le sont, nous déduisons que la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma \cup \gamma_2[y,p_1]$ de G n'est contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que ces deux graphes forment un recouvrement de G. Nous en déduisons que $R'_1 \subset H'_1$ et $R'_2 \subset H'_2$.



2ème cas - $v \in \overset{\circ}{\gamma}''_2$.

γ_1 et γ_2 jouant des rôles symétriques, nous obtenons le même résultat que dans le premier cas.

3ème cas - $v \in \overset{\circ}{\gamma}$.

Supposons $R_1 \subset H'_1$ et $R_2 \subset H'_2$.

Considérons la chaîne $\mu \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de G. Si l'on adjoint cette

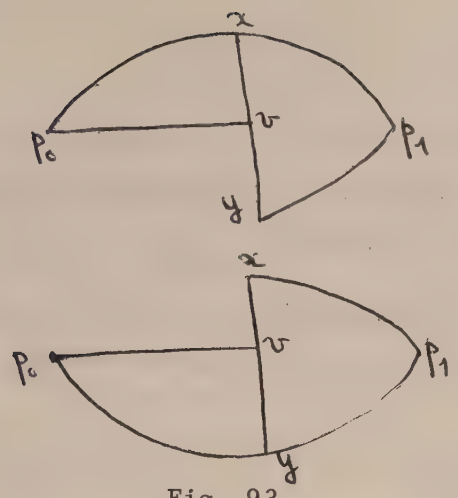


Fig. 93

chaîne aux graphes R_1 et R_2, les graphes obtenus (figure 93) ne sont pas $SP(P_o,P_1)$; puisque H'_1 et H'_2 le sont, nous en déduisons que la chaîne $\mu \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de G n'est contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que ces deux graphes forment un recouvrement de G. Nous en déduisons $R'_1 \subset H'_1$ et $R'_2 \subset H'_2$.

Démonstration du lemme 2 -

Puisque H' contient H, ici encore tout recouvrement de G est constitué par deux graphes H'_1 et H'_2 vérifiant alors l'une des conditions suivantes

(i) $R_1 \subset H'_1$ et $R_2 \subset H'_2$

(ii) $R'_1 \subset H'_1$ et $R'_2 \subset H'_2$

Par hypothèses, H' contient une chaîne μ de M dont les extrémités sont un sommet u de $\overset{\circ}{\gamma}'_1 \cup \overset{\circ}{\gamma}'_2 \cup \overset{\circ}{\gamma}$ et $v = P_1$.

1er cas - $u \in \overset{\circ}{\gamma}'_1$.

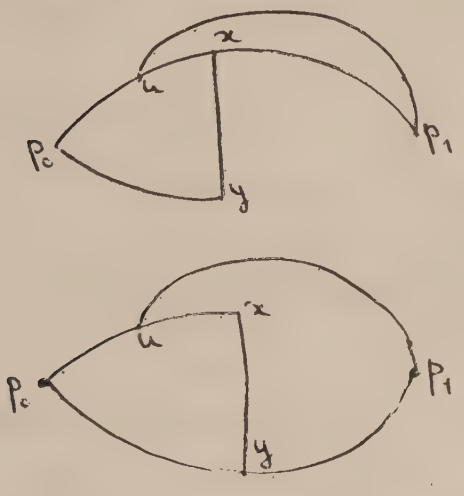


Fig. 94

Supposons $R'_1 \subset H'_1$ et $R'_2 \subset H'_2$. Considérons la chaîne $\gamma_{2[p_o,y]} \cup \gamma \cup \gamma_{1[x,u]} \cup \mu$. Si l'on adjoint cette chaîne aux graphes R'_1 et R'_2, les graphes obtenus (figure 94) ne sont pas SP (P_o, P_1). Comme H'_1 et H'_2 le sont, nous en déduisons que la chaîne $\gamma_{2[p_o,y]} \cup \gamma \cup \gamma_{1[x,u]} \cup \mu$ de G n'est contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de G. Nous en déduisons $R_1 \subset H'_1$ et $R_2 \subset H'_2$.

2ème cas - $u \in \overset{\circ}{\gamma}'_2$.

γ_1 et γ_2 jouant des rôles symétriques, nous obtenons le même résultat que dans le premier cas.

3ème cas - $u \in \mathring{\gamma}$.

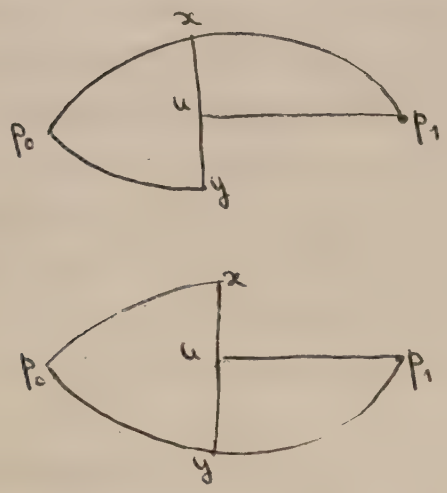


Fig. 95

Supposons $R'_1 \subset H'_1$ et $R'_2 \subset H'_2$. Considérons la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu$ de G. Si l'on adjoint cette chaîne aux graphes R'_1 et R'_2, les graphes obtenus (figure 95) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; comme H'_1 et H'_2 le sont, nous en déduisons que la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \gamma[x,u] \cup \mu$ de G n'est contenue ni dans H'_1 ni dans H'_2, ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de G. Nous en déduisons $R_1 \subset H'_1$ et $R_2 \subset H'_2$.

Démonstration de la proposition -

Raisonnons par l'absurde en supposant que les ensembles A et B soient non vides. Puisque $\sigma(G) = 2$, il existe un recouvrement de cardinal 2 de G.

Les lemmes 1 et 2 appliqués au graphe $H' = G$ impliquent qu'un tel recouvrement est constitué de deux graphes SP (P_o, P_1) G^1 et G^2 vérifiant l'une des deux propriétés suivantes :

1) $R_1 \cup R'_1 \subset G^1$ et $R_2 \cup R'_2 \subset G^2$

2) $R_1 \cup R'_2 \subset G^1$ et $R_2 \cup R'_1 \subset G^2$

Remarquons que $R_1 \cup R'_1 = R_1 \cup R'_2 = H$.

Nous en déduisons que G^1 contient H et que, par suite, $\sigma(G^1) \geq \sigma(H) = 2$; ce qui contredit le fait que G^1 soit SP (P_o, P_1).

L'hypothèse selon laquelle A et B seraient non vides est donc absurde et la proposition est démontrée.

Nous poursuivons notre étude en la subdivisant en quatre paragraphes.

- Dans le paragraphe I, nous établissons un certain nombre de propriétés de G liées à l'hypothèse $B = \emptyset$.

- Le paragraphe II fournit une caractérisation de G, assujettie aux deux hypothèses suivantes :

. $B = \emptyset$

. Il existe un recouvrement de G formé de deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R'_1 \subset G'_1$ et $R'_2 \subset G'_2$.

- Le paragraphe III fournit une caractérisation de G, assujettie aux deux hypothèses suivantes :

. $B = \emptyset$

. Il existe un recouvrement de G formé de deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R_1 \subset G'_1$ et $R_2 \subset G'_2$.

- Le paragraphe IV fournit une caractérisation de G liée à l'hypothèse $A = \emptyset$

Paragraphe I -

Dans ce paragraphe, nous considérons donc que B est vide.

Nous allons, maintenant, établir des conditions nécessaires à l'existence dans le graphe G de deux chaînes μ et μ' de M.

Propositions I^1 -

(PI^1) Soient v et v', deux sommets distincts de γ''_1.
S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' alors $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ est vide.

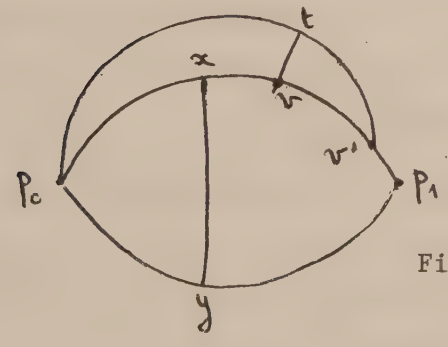


Fig. 96

Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités P_o,v et P_o,v' vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$. Nous pouvons supposer que v précède v' sur γ_1, ce que nous notons $v \underset{\gamma_1}{<} v'$.

Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu''}$

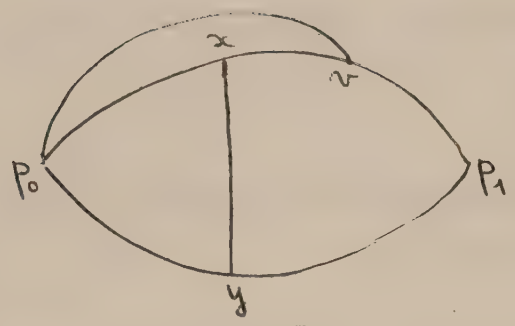


Fig. 97

rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers v'. Le graphe $H' = H \cup \mu_{[P_o,t]} \mu'_{[t,v']}$ (figure 96) étant connexe, $\sigma(H')$ est strictement positif. Par toute arête de H, nous vérifions qu'il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1 ; H' ne peut donc avoir un invariant $\sigma(H')$ égal à 1 que s'il est SP (P_o, P_1), ce qui n'est pas le cas ; d'où $\sigma(H') \geq 2$.

Comme H' est un sous-graphe partiel de H et que $\sigma(G) = 2$, nous en déduisons que $\sigma(H') = 2$. Remarquons qu'étant nécessairement distinct de P_1, v' appartient à $\overset{\circ}{\gamma}''_1$, H' contenant H et μ étant une chaîne de A, le lemme 1 nous permet alors d'affirmer que tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$.

Si l'on adjoint la chaîne $\mu \cup \gamma_{1[v,x]} \cup \gamma \cup \gamma_{2[y,p_1]}$ de H' à R'_1, le graphe obtenu (figure 97) n'est pas SP (P_o, P_1), (les arêtes de γ ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante d'ELGOT et WRIGHT). Nous en déduisons que la chaîne $\mu \cup \gamma_{1[v,x]} \cup \gamma \cup \gamma_{2[y,p_1]}$ n'est pas contenue dans H'_1 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', cette chaîne est contenue dans H'_2. H'_2 contient alors le graphe $G_2 = R'_2 \cup \mu \cup \gamma_{1[v,x]} \cup \gamma \cup \gamma_{2[y,p_1]}$.

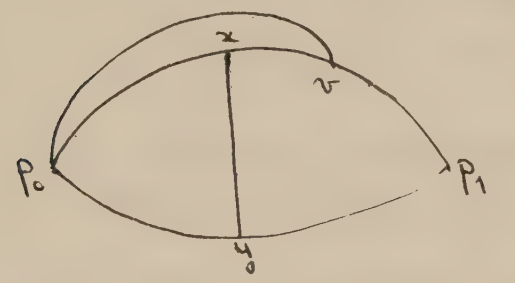
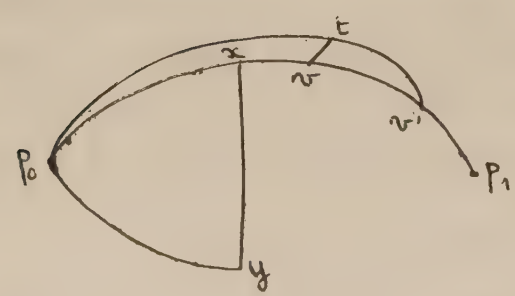


Fig. 98

Adjoignons à G_2 la chaîne $\mu \cup \gamma_{1[v,p_1]}$ de H'. Le graphe ainsi obtenu (figure 98) n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que H'_2 ne contient pas la chaîne $\mu \cup \gamma_{1[v,p_1]}$. Cette chaîne est donc contenue dans H'_1. H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R'_1 \cup \mu \cup \gamma_{1[v,p_1]}$. Adjoignons à G_1 et à G_2 la chaîne $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,v']} \cup \gamma_{1[v',p_1]}$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 99) ne sont pas SP (P_o,P_1) ; nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,v']} \cup \gamma_{1[v',p_1]}$ de H', ce qui contredit le fait



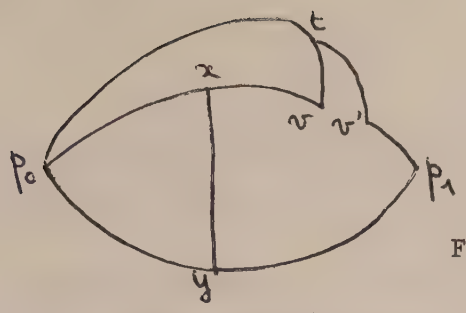


Fig. 99

que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe. L'hypothèse $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition est démontrée.

Nous démontrerions de même la proposition suivante :

$(P'I^1)$ [Soient v et v' deux sommets distincts de γ''_2. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités P_o, v et P_o, v', alors $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ est vide.

Propositions I^2 -

(PI^2) [S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,x et P_o,y, alors $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} = \emptyset$

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,x et P_o,y vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$. Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers y. Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'_{[t,y]}$ (figure 100) est inclus dans G et vérifie, ici encore, $\sigma(H') = 2$.

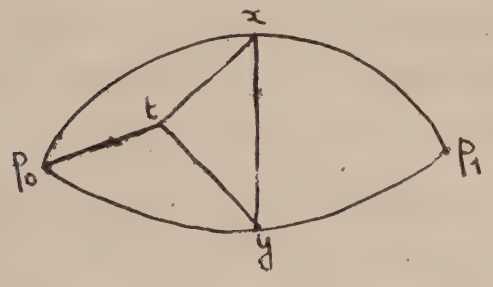


Fig. 100

H' contenant H, tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

1) $R_1 \subset H'_1$, $R_2 \subset H'_2$

2) $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$

1er cas - $R_1 \subset H'_1$, $R_2 \subset H'_2$

Si l'on adjoint la chaîne $\mu \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de H' à R_2, le graphe obtenu (figure 101) n'est pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R_1 \cup \mu \cup \gamma_{1[x,p_1]}$. Adjoignons à G_1

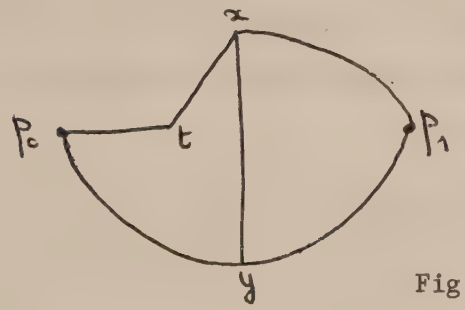


Fig. 101

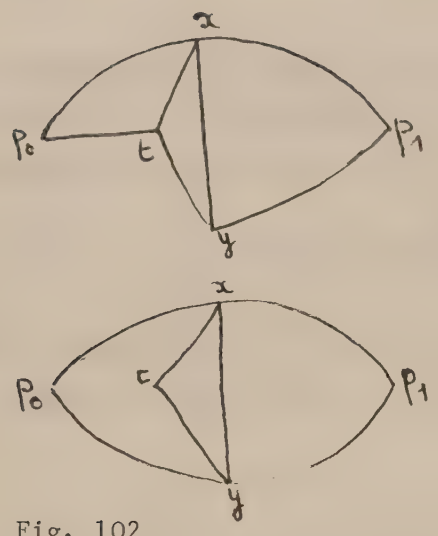


Fig. 102

et à R_2 la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \mu[x,t] \cup \mu'[t,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ de H'. Les graphes ainsi obtenus (figure 102) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\gamma_1[p_o,x] \cup \mu[x,t] \cup \mu'[t,y] \cup \gamma_2[y,p_1]$ de H', ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe.

2ème cas - $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$.

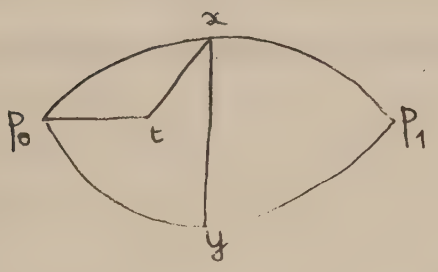


Fig. 103

Si l'on adjoint la chaîne $\mu \cup \gamma_1[x,p_1]$ à R'_2, le graphe ainsi obtenu (figure 103) n'est pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R'_1 \cup \mu \cup \gamma_1[x,p_1]$.

Adjoignons à G_1 et à R'_2 la chaîne $\gamma_2[p_o,y] \cup \mu'[y,t] \cup \mu[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H' ; les graphes ainsi obtenus (figure 104) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\gamma_2[p_o,y] \cup \mu'[y,t] \cup \mu[t,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H', ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition (P_I^2) est démontrée.

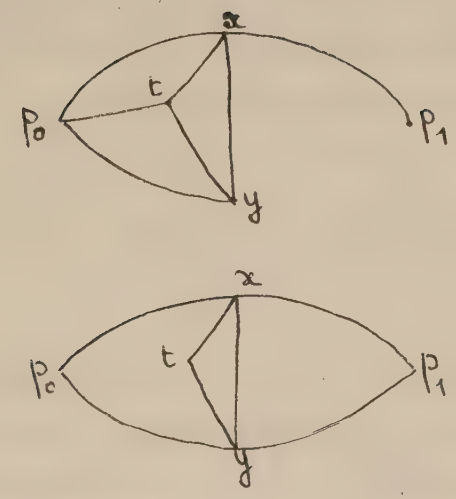


Fig. 104

Nous établirions de même la proposition suivante :

$(P'I^2)$ [S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives x, P_1 et y, P_1, alors $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} = \emptyset$.

Proposition I^3 -

(PI^3) [Soient v et v' deux sommets distincts de γ. v précède v' sur γ ($v \underset{\gamma}{\leq} v'$) et le couple (v, v') est distinct de (x,y). S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v', alors $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ est vide.

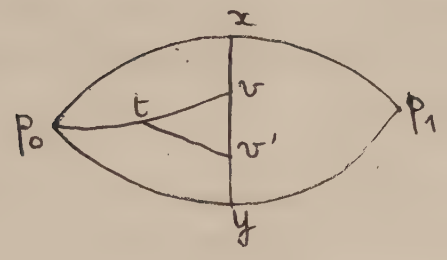


Fig. 105

Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,v et P_o,v' vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$. Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$, rencontré lorsqu'on parcourt μ' de P_o vers v'. Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'[t,v']$ (figure 105) est un sous-graphe partiel de G, et ici encore, $\sigma(H') = 2$. Puisque (v, v') est distinct de (x, y), l'une au moins des deux chaînes μ et μ' appartient à A. H' contenant H et une chaîne de A, le lemme 1 nous permet d'affirmer que tout recouvrement de H' est constitué de deux sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$.

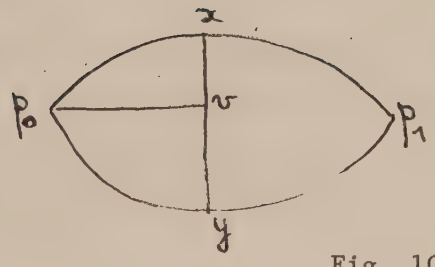


Fig. 106

Si l'on adjoint la chaîne $\mu \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ à R'_2, le graphe obtenu (figure 106) n'est pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que la chaîne $\mu \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', cette chaîne est contenue dans H'_1. H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R'_1 \cup \mu \cup \gamma[v,x] \cup \gamma_1[x,p_1]$. Adjoignons à G_1 et à R'_2 la chaîne $\mu[p_o,t] \cup \mu'[t,v'] \cup \gamma[v',x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H' ; les graphes ainsi obtenus (figure 107)

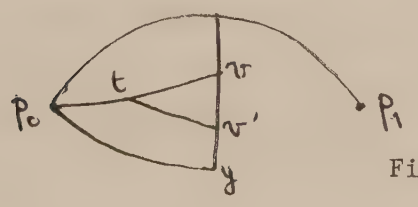


Fig. 107

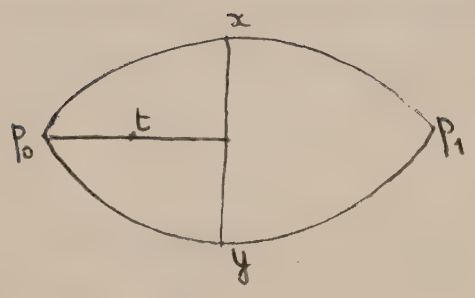


fig. 107

ne sont pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\mu_{[p_o,t]} \cup \mu'_{[t,v']} \cup \gamma_{[v',x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de H', ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition est démontrée.

Propositions I^4 -

(PI^4) Soient v, u' et v', trois sommets de γ''_1 ; u' précède v' sur γ_1 $(u' \underset{\gamma_1}{\leq} v')$. S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o,v et u',v', alors $v \in \gamma_{1[x,u']} \cup \gamma_{1[v',p_1]}$.

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités P_o,v et u',v', vérifiant $u' \underset{\gamma_1}{\leq} v \underset{\gamma_1}{\leq} v'$; nous distinguons deux cas selon que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide ou non.

1er cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. μ et $\nu = \mu_{[p_o,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$ sont alors deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' (où v et v' sont deux sommets distincts de γ''_1 et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu} \neq \emptyset$. Ceci est impossible en vertu de la propriété (P_1).

2ème cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$

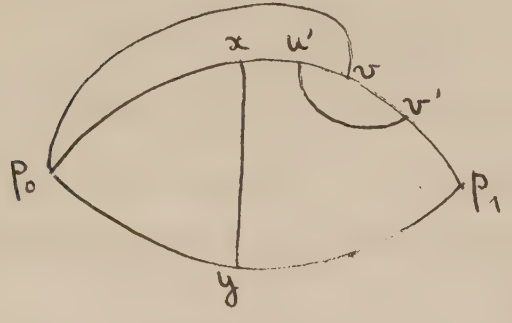


Fig. 108

Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'$ (figure 108) est inclus dans G et vérifie $\sigma(H') = 2$. Puisque v appartient à $\mathring{\gamma}''_1$, μ est élément de A. H' contenant H et μ étant une chaîne de A, le lemme 1 nous permet alors d'affirmer que tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$.

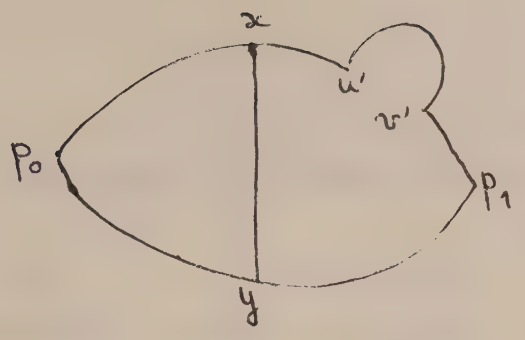


Fig. 109

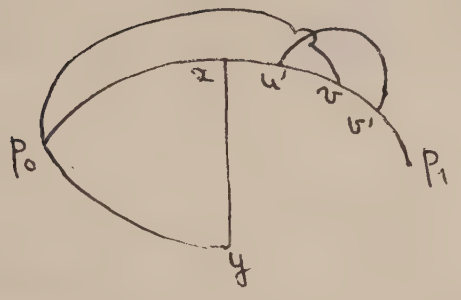


Fig. 110

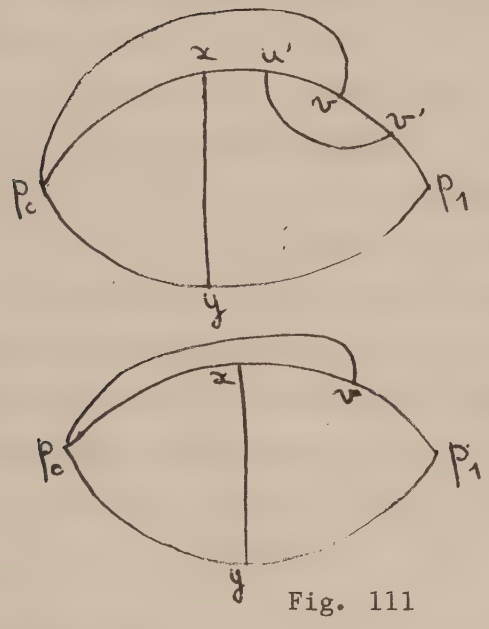


Fig. 111

Si l'on adjoint la chaîne $\gamma_1[p_o,u'] \cup \mu' \cup \gamma_1[v',p_1]$ à R'_2, le graphe obtenu (figure 109) n'est pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H', la chaîne $\gamma_1[p_o,u'] \cup \mu' \cup \gamma_1[v',p_1]$ de H' est contenue dans H'_1. H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R'_1 \cup \gamma_1[p_o,u'] \cup \mu' \cup \gamma_1[v',p_1]$. Adjoignons à G_1 la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,p_1]$ de H'. Le graphe ainsi obtenu (figure 110) n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que H'_1 ne contient pas la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,p_1]$ de H'. Cette chaîne est donc contenue dans H'_2. H'_2 contient alors le graphe $G_2 = R'_2 \cup \mu \cup \gamma_1[v,p_1]$. Adjoignons à G_1 et à G_2 la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma \cup \gamma_2[y,p_1]$ de H'. Les deux graphes ainsi obtenus (figure 111) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\mu \cup \gamma_1[v,x] \cup \gamma \cup \gamma_2[y,p_1]$ de H', ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ est donc absurde et la proposition est démontrée.

Nous établirions de même la proposition suivante :

($P'I^4$) Soient v, u' et v', trois sommets de γ''_2 ; u' précède v' sur γ_2 ($u' \underset{\gamma_2}{\leq} v'$). s'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v', alors $v \in \gamma_2[y,u'] \cup \gamma_2[v',p_1]$.

Proposition I^5 -

(PI^5) Soient v, u' et v' trois sommets de γ ; u' précède v' sur γ ($u' \underset{\gamma}{\leq} v'$). S'il existe deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v', alors $v \in \gamma_{[x,u']} \cup \gamma_{[v',y]}$.

Démontrons cette proposition par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' de M d'extrémités respectives P_o, v et u', v' vérifiant $u' \underset{\gamma}{\leq} v \underset{\gamma}{\leq} v'$; nous distinguons deux cas selon que $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ est vide ou non.

1er cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$

Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. μ et $\nu = \mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$ sont alors deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, v et P_o, v' (où v et v' sont deux sommets distincts de γ et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\nu} \neq \emptyset$. Ceci est impossible en vertu des propositions PI^2 et PI^3.

2ème cas - $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$

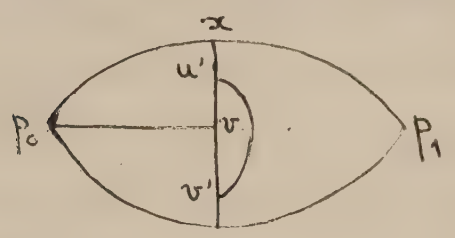


Fig. 112

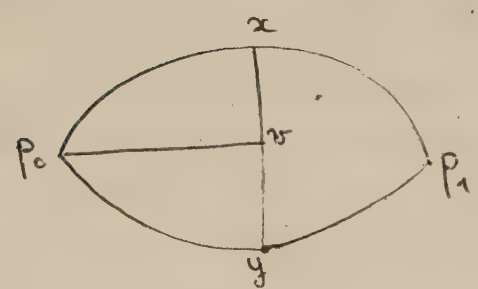
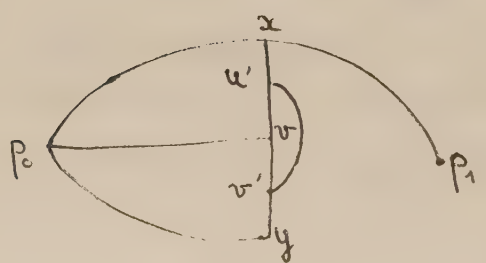


Fig. 113



Le graphe $H' = H \cup \mu \cup \mu'$ (figure 112) est inclus dans G et vérifie $\sigma(H') = 2$. Puisque v appartient à $\mathring{\gamma}$, μ est élément de A. H' contenant H et μ étant une chaîne de A, le lemme 1 nous permet d'affirmer que tout recouvrement de cardinal 2 de H' est constitué de deux sous-graphes partiels H'_1 et H'_2 vérifiant $R'_1 \subset H'_1$, $R'_2 \subset H'_2$.

Si l'on adjoint la chaîne $\mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ à R'_2, le graphe obtenu (figure 113) n'est pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que cette chaîne n'est pas contenue dans H'_2 ; H'_1 et H'_2 formant un recouvrement de H' la chaîne $\mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$ de H' est contenue dans H'_1. H'_1 contient alors le graphe $G_1 = R'_1 \cup \mu_{[P_o,v]} \cup \gamma_{[v,x]} \cup \gamma_{1[x,p_1]}$.

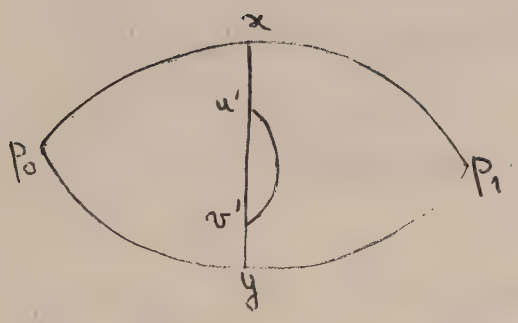


Fig. 114

Adjoignons à G_1 et à R'_2 la chaîne $\gamma_2[p_o,y] \cup \gamma[y,v'] \cup \mu' \cup \gamma[u',x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H'. Les graphes ainsi obtenus (figure 114) ne sont pas SP (P_o, P_1) ; nous en déduisons que ni H'_1 ni H'_2 ne contiennent la chaîne $\gamma_2[p_o,y] \cup \gamma[y,v'] \cup \mu' \cup \gamma[u',x] \cup \gamma_1[x,p_1]$ de H', ce qui contredit le fait que H'_1 et H'_2 forment un recouvrement de ce graphe.

L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' = \emptyset$ est donc absurde et la proposition est démontrée.

Notations -

Nous désignons par $q_o^o, q_o^1, \ldots q_o^{r_o} = x$ les sommets de $\gamma''_1 - \{p_1\}$ qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma'_1\}$ dont l'autre extrémité est P_o. L'indexation de ces sommets est telle que lorsqu'on parcourt γ_1 de P_o vers P_1, nous les rencontrons dans l'ordre suivant :
$q_o^{r_o}, q_o^{r_o-1}, \ldots, q_o^1, q_o^o$, ce que nous notons $q_o^{r_o} \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^{r_o-1} \underset{\gamma_1}{\leq} \ldots \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^1 \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^o$.

$x = q_o^{r_o}, q_o^{r_o+1}, \ldots, q_o^{s_o} = y$ désignent les sommets de γ qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ dont l'autre extrémité est P_o. L'indexation de ces sommets est telle que lorsqu'on parcourt γ de x vers y, nous les rencontrons dans l'ordre suivant :
$q_o^{r_o}, q_o^{r_o+1}, \ldots, q_o^{s_o}$, ce que nous notons $q_o^{r_o} \underset{\gamma}{\leq} q_o^{r_o+1} \underset{\gamma}{\leq} \ldots \underset{\gamma}{\leq} q_o^{s_o}$.

$y = q_o^{s_o}, q_o^{s_o+1}, \ldots, q_o^{n_o}$ désignent les sommets de $\gamma''_2 - \{p_1\}$ qui sont extrémités d'une chaîne de $M \cup \{\gamma'_2\}$ dont l'autre extrémité est P_o. L'indexation de ces sommets est telle que, lorsqu'on parcourt γ_2 de P_o vers P_1, nous les rencontrons dans l'ordre suivant :
$q_o^{s_o}, q_o^{s_o+1}, \ldots, q_o^{n_o}$, ce que nous notons $q_o^{s_o} \underset{\gamma_2}{\leq} q_o^{s_o+1} \underset{\gamma_2}{\leq} \ldots \underset{\gamma_2}{\leq} q_o^{n_o}$.

Remarque -

Les entiers r_o, s_o, n_o vérifient les inégalités suivantes :

$$0 \leq r_o < s_o \leq n_o$$

Nous adoptons les notations suivantes :

$\forall_i \in \{0,\ldots, n_o\}$, $\Psi_o^i = \{\mu \in M/$ les extrémités de μ sont P_o et $q_o^i\}$
$i \neq r_o, s_o$

$\Psi_o^{r_o} = \{\mu \in M/$ les extrémités de μ appartiennent à $\gamma_1'\}$

$\Psi_o^{s_o} = \{\mu \in M/$ " " μ " $\gamma_2'\}$

$\forall_i \in \{1,\ldots, r_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu \in M/$ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_1'' et vérifient $q_o^i \underset{\gamma_1}{\leq} u < v \underset{\gamma_1}{\leq} q_o^{i-1}\}$

$\forall_i \in \{r_o+1,\ldots, s_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu \in M/$ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ et vérifient $q_o^{i-1} \underset{\gamma}{\leq} u < v \underset{\gamma}{\leq} q_o^i\}$

$\forall_i \in \{s_o+1,\ldots, n_o\}$, $\Phi_o^i = \{\mu \in M/$ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_2'' et vérifient $q_o^{i-1} \underset{\gamma_2}{\leq} u < v \underset{\gamma_2}{\leq} q_o^i\}$.

$\Omega_1 = \{\mu \in M/$ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_1'' et vérifient $q_o^o \underset{\gamma_1}{\leq} u < v \underset{\gamma_1}{\leq} P_1\}$

$\Omega_2 = \{\mu \in M/$ les extrémités u et v de μ appartiennent à γ_2'' et vérifient $q_o^{n_o} \underset{\gamma_2}{\leq} u < v \underset{\gamma_2}{\leq} P_1\}$.

Conventions -

Nous adoptons la même notation pour un ensemble de chaînes et le graphe constitué de la réunion des chaînes de cet ensemble.

Exemple - Φ_o^i désigne aussi le graphe $\bigcup_{\phi i \in \Phi i_o} \phi_o^i$; M désigne aussi le graphe $\bigcup_{\mu \in M} \mu$.

La figure 115 illustre les notations que nous venons d'exposer. Le graphe H y est représenté en pointillé.

. Etant donnés trois entiers m, n et P,
$1 \leq m < n \leq P$ et une famille d'ensembles $A_1, A_2,\ldots, A_p$, nous posons
$\bigcup_{i=n}^{m} A_i = \emptyset$

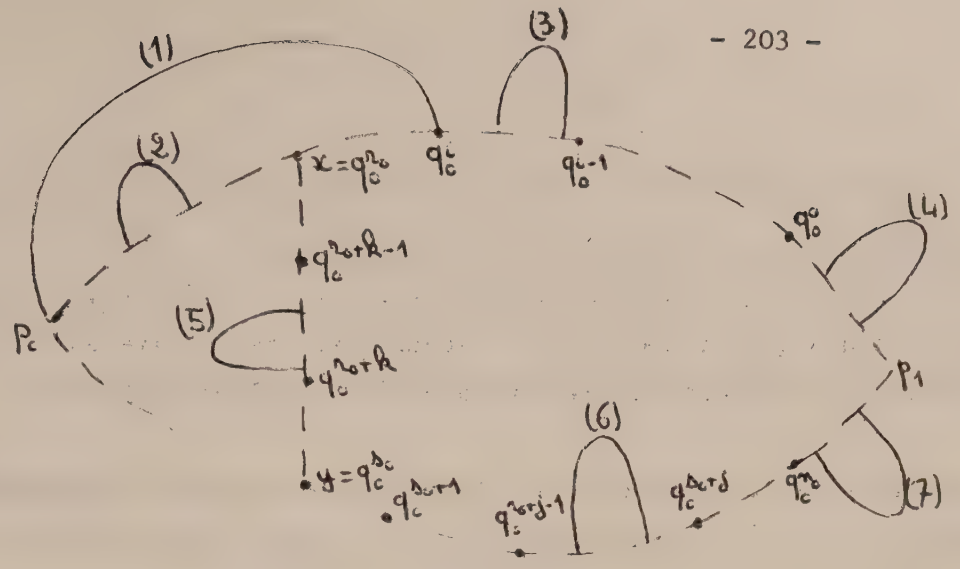


Fig. 115

En trait plein nous avons représenté 7 chaînes de M, numérotées de 1 à 7.

(1) est élément de Ψ_o^i

(2) " " " $\Psi_o^{r_o}$

(3) " " " Φ_o^i

(4) " " " Ω_1

(5) " " " $\Phi_o^{r_o+k}$

(6) " " " $\Phi_o^{s_o+j}$

(7) " " " Ω_2

Puisque $G = H \cup M$, le tableau de la page 189 et les propositions PI^4 et PI^5 nous permettent d'écrire :

$$G = H \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_o} \Phi_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_o} \Psi_o^i\right) \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$$

Les ensembles $\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1, \Omega_2$ sont disjoints et forment une partition de M.

Nous allons démontrer que deux chaînes de M appartenant à deux éléments distincts de la partition sont nécessairement disjointes(sauf peut-être en leurs extrémités). Pour cela, jusqu'à nouvel ordre, nous considérons $\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Psi_o^o, \Psi_o^1, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1, \Omega_2$ non plus comme des graphes, mais comme des ensembles de chaînes (sous-ensembles de M).

Etablissons les propriétés suivantes dont les résultats sont résumés dans le tableau de la page 212.

Propriétés I^1 -

(PRI^1) Pour tout couple d'indices (i,j), $1 \leq i \leq r_o$, $1 \leq j \leq r_o$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $1 \leq i < j \leq r_o$, tels qu'il existe deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Phi_o^i$, $\mu' \in \Phi_o^j$, $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$.

Soient u et v (resp. u' et v') les extrémités de μ (resp. μ').

Elles vérifient les inégalités suivantes $u' <_{\gamma_1} v' \leq_{\gamma_1} q_o^i \leq_{\gamma_1} u <_{\gamma_1} v$.

Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'.

Considérons une chaîne ψ_o^i de Ψ_o^i et la chaîne $\mu' = \mu_{[u',t]} \cup \mu_{[t,v']}$; ce sont deux éléments de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et u', v vérifiant : $q_o^i \in \overset{\circ}{\gamma_1''}$; $u', v \in \gamma_1''$; $u' \leq_{\gamma_1} q_o^i \leq_{\gamma_1} v$. Ceci est impossible en vertu de la proposition (P_I^4).

Nous aboutissons donc à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PRI^1).

Utilisant la proposition $(P'I^4)$ nous démontrerions de même la proposition $(PR'I^1)$.

$(PR'I^1)$ Pour tout couple d'indices (i,j), $s_o+1 \leq i \leq n_o$, $s_o+1 \leq j \leq n_o$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés I^2 -

(PRI^2) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i$ et Ω_1 sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Le raisonnement tenu lors de la démonstration de (PRI^1) peut être repris intégralement pour démontrer cette propriété.

$(PR'I^2)$ Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensemble $\bigcup_{i=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^i$ et Ω_2 sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Cette propriété se démontre exactement comme la propriété $(PR'I^1)$.

Propriétés I^3 -

(PRI^3) Pour tout couple d'indices (i,j), $0 \leq j < i \leq r_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Si μ et μ' ont P_o pour extrémité, (PRI^3)n'est qu'une autre formalisation de la proposition (PI^1).

Si l'une des deux chaînes μ et μ' a ses deux extrémités distinctes de P_o, c'est nécessairement la chaîne μ et i est égal à r_o ; l'une au moins des extrémités de μ appartient à $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$, soit u ce sommet. j est nécessairement différent de r_o et μ' a pour extrémités P_o et q_o^j, sommet de $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1$.

Supposons que $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}'$ soit non vide. Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu}{}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de p_o vers q_o^j. $\mu[u,t] \cup \mu'[t,q_o^j]$ est alors une chaîne de M dont les extrémités u et q_o^j sont respectivement sommets de $\overset{\circ}{\gamma}{}'_1$ et de $\overset{\circ}{\gamma}{}''_1$; en nous reportant au tableau de la page 189, nous constatons que ceci est impossible. La propriété (PRI_3) est ainsi démontrée.

Nous démontrerions de même la propriété suivante.

$(PR'I^3)$ Pour tout couple d'indices (i,j), $s_o \leq i < j \leq n_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriétés I^4 -

(PRI^4) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i$ et $(\bigcup_{j=1}^{r_o} \Phi_o^j) \cup \Omega_1$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence d'un indice i, $o \leq i \leq r_o$, et de deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Psi_o^i$, $\mu' \in (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^j) \cup \Omega_1$, $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$.

Distinguons deux cas :

1er cas - P_o est extrémité de μ.

L'une au moins des extrémités, soit u', de μ' est distincte de q_o^i. Soit v' l'autre extrémité de μ' et t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$, rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. μ et $\nu = \mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et P_o, u', vérifiant q_o^i, $u' \in \gamma_1''$ et $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\nu} \neq \emptyset$, ce qui contredit la proposition (PI^1).

2ème cas - P_o n'est pas extrémité de μ.

Dans ce cas, $i = r_o$ et l'une au moins des extrémités, soit u, de μ appartient à $\overset{\circ}{\gamma_1'}$. Soient u' et v', les extrémités de μ' ; l'une d'entre elles est différente de x, nous admettrons que c'est u' (si c'est v' le raisonnement est évidemment le même) ; u' appartient à $\overset{\circ}{\gamma_1''} \cup \{P_1\}$.

Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ est alors une chaîne de M dont les extrémités appartiennent respectivement à $\overset{\circ}{\gamma_1'}$ et $\overset{\circ}{\gamma_1''} \cup \{P_1\}$, ce qui est impossible puisque B est vide.

Dans les deux cas nous aboutissons à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PRI_4).

Nous démontrerions de même la propriété suivante :

$(PR'I^4)$ Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i$ et $(\bigcup_{j=s_o+1}^{n_o} \Phi_o^j) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriété I^5 -

(PRI^5) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i < s_o$, $r_o+1 \leq j < s_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Ψ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Cette propriété n'est qu'une autre formalisation de la proposition (PI^3).

Propriété I^6 -

(PRI^6) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i \leq s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$, $i \neq j$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Φ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $r_o+1 \leq i < j \leq s_o$ et de deux chaînes μ et μ' vérifiant $\mu \in \Phi_o^i$, $\mu' \in \Phi_o^j$ et $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$

Soient u et v (resp. u' et v') les extrémités de μ (resp. μ'). Elles vérifient les inégalités suivantes $u < v \underset{\gamma}{\leq} q_o^i \underset{\gamma}{\leq} u' < v'$.

Soit t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de u' vers v'. Considérons une chaîne Ψ_o^i de Ψ_o^i et la chaîne $\mu_{[u,t]} \cup \mu'_{[t,v']}$; ce sont deux éléments de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et u, v' vérifiant $u, v' \in \gamma$; $q_o^i \in \overset{\circ}{\gamma}$; $u \underset{\gamma}{\leq} q_o^i \underset{\gamma}{\leq} v'$. Ceci est impossible en vertu de la proposition (PI^5) Nous aboutissons donc à une impossibilité, ce qui démontre la propriété (PRI^6).

Propriété I^7 -

(PRI^7) Pour tout couple d'indices (i,j), $r_o+1 \leq i < s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$, deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles Ψ_o^i et Φ_o^j sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux indices i et j, $r_o+1 \leq i < s_o$, $r_o+1 \leq j \leq s_o$ et deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à Ψ_o^i et Φ_o^j et telles que $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ ne soit pas vide. L'une, au moins, des extrémités u' de μ' est distincte de q_o^i. Soit v' l'autre

extrémité de μ' et t le dernier sommet de $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'. μ et $\nu = \mu_{[p_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_o, q_o^i et P_o, u' vérifiant q_o^i, u' $\in \gamma$ et $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\nu} \neq \emptyset$, ce qui contredit la proposition (PI^3) ou (PI^2) et démontre la propriété (PRI_7).

Propriété I^8 -

(PRI^8) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=s_o}^{n} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n} \Phi_o^i) \cup \Omega_2$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à $(\bigcup_{i=o}^{r} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=s_o}^{n} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=s_o+1}^{n} \Phi_o^i) \cup \Omega_2$ vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$.

Les extrémités de μ (resp. μ') sont des sommets de γ_1 (resp. γ_2) et l'une d'entre elles, u (resp. u'), est nécessairement distincte de P_o et de P_1. $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν de M d'extrémités u et u'. ν est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{P_o,P_1\} = \overset{\circ}{\gamma_1'} \cup \overset{\circ}{\gamma_1''} \cup \{x\}$ à $\gamma_2 - \{P_o,P_1\} = \overset{\circ}{\gamma_2'} \cup \overset{\circ}{\gamma_2''} \cup \{y\}$.

D'après le tableau de la page 189, ceci n'est possible que si le couple de sommets (u,u') est égal à (x,y).

Soit v (resp. v') l'extrémité de μ (resp. μ') distincte de u (resp. de u'). $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'}$ étant non vide, il existe deux chaînes ν_1 et ν_2 d'extrémités respectives u, v' et u', v qui soient réunions de sous-chaînes de μ et de μ'. Le tableau de la page 189 nous permet d'affirmer que v et v' sont égaux à P_o ou à P_1.

Si $v = v' = P_o$, μ et μ' sont deux chaînes de M d'extrémités P_o, x et P_o, y, et vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$; ce qui contredit la proposition (PI^2).

Si $v = v' = P_1$, μ et μ' sont deux chaînes de M d'extrémités respectives P_1, x et P_1, y et vérifiant $\overset{\circ}{\mu} \cap \overset{\circ}{\mu'} \neq \emptyset$; ce qui contredit la proposition ($P'I^2$).

Si $v = P_o$ et $v' = P_1$, soit t le dernier point de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de y vers P_1. $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,P_1]}$ est alors une chaîne de M d'extrémités P_o et P_1, ce qui est impossible. Le raisonnement est le même si $v = P_1$ et $v' = P_o$.

Propriétés I^9 -

(PRI^9) Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement à $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant l'existence de deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $(\bigcup_{i=o}^{r_o} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{r_o} \Phi_o^i) \cup \Omega_1$ et $(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i) \cup (\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i)$ et vérifiant $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$.

L'une des extrémités, soit u, de μ est un sommet $\gamma_1 - \{p_o,p_1\}$. μ' ne peut avoir P_o et x pour extrémités ; en effet cela signifierait que μ' appartient à $\Psi_o^{r_o}$; puisque les extrémités de μ' appartiennent à $\gamma \cup \{p_o\}$, nous en déduisons que l'une d'entre elles (nous la désignerons par u'), appartient à $\gamma - \{x\} = \mathring{\gamma} \cup \{y\}$. $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ étant non vide, il existe une sous-chaîne de μ et une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν de M d'extrémités u et u'. ν est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{p_o,p_1\}$ à $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$.

D'après le tableau de la page 189, ceci n'est possible que si $u = x$. Soient v (resp. v') l'extrémité de μ (resp. μ') distincte de u (resp. u'). Puisque v et u' appartiennent respectivement à $\gamma_1 - \{x\}$ et $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$, ces deux sommets sont distincts. L'hypothèse $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}' \neq \emptyset$ implique alors l'existence d'une sous-chaîne de μ et d'une sous-chaîne de μ' dont la réunion forme une chaîne ν' de M d'extrémités v et u'. ν' est donc un élément de M reliant $\gamma_1 - \{x\} = \mathring{\gamma}'_1 \cup \mathring{\gamma}''_1 \cup \{p_o,p_1\}$ à $\mathring{\gamma} \cup \{y\}$.

Si $u' \in \mathring{\gamma}$, le tableau de la page 189 nous indique $v = P_o$. Soit t le dernier sommet de $\mathring{\mu} \cap \mathring{\mu}'$ rencontré lorsqu'on parcourt μ' de v' vers u'.

μ et $\mu_{[P_o,t]} \cup \mu'_{[t,u']}$ sont deux chaînes de M d'extrémités P_o, x et P_o, u' ; comme x et u' sont deux sommets distincts de γ , le fait que ces deux chaînes aient un sommet intérieur commun contredit la proposition (PI^3). Nous en déduisons que u' n'appartient pas à $\overset{\circ}{\gamma}$; u' est donc égal à y et l'existence de ν' implique que v est égal à P_o ou à P_1.

Si $v = P_o$, μ et ν' sont deux chaînes d'extrémités respectives P_o, x et P_o, y, possédant au moins un sommet intérieur commun, ce qui contredit la proposition (PI^2).

Si $v = P_1$, μ et ν' sont deux chaînes d'extrémités respectives P_1, x et P_1, y, possédant au moins un sommet intérieur commun, ce qui contredit la proposition $(P'I^2)$.

Dans tous les cas nous aboutissons à une contradiction et la propriété (PRI_9) est démontrée.

Nous démontrerions de même la propriété $(PR'I_9)$.

$(PR'I^9)$ Deux chaînes quelconques μ et μ' appartenant respectivement aux ensembles $\left(\bigcup_{i=s_o}^{n_o} \Psi_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=s_o+1}^{n} \Phi_o^i\right) \cup \Omega_2$ et $\left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o-1} \Psi_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=r_o+1}^{s_o} \Phi_o^i\right)$ sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Propriété fondamentale -

Deux chaînes quelconques μ et μ', appartenant à deux éléments distincts de la partition $\{\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1, \Omega_2\}$ de M, sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Cette propriété n'est qu'une autre formulisation des propriétés (numérotées de 1 à 9) que nous venons de démontrer. Pour nous en assurer, il nous suffit de considérer le tableau récapitulatif ci-dessous. A chaque ligne (resp. colonne) de celui-ci, correspond l'un des éléments suivants :
$\Phi_o^{i_o}, \Phi_o^{i'_o}, \Phi_o^{j_o}, \Phi_o^{j'_o}, \Phi_o^{k_o}, \Phi_o^{k'_o}, \Psi_o^{t_o}, \Psi_o^{t'_o}, \Psi_o^{u_o}, \Psi_o^{u'_o}, \Psi_o^{v_o}, \Psi_o^{v'_o}$; les indices $i_o, i'_o, j_o, j'_o, k_o, k'_o, t_o, t'_o, u_o, u'_o, v_o, v'_o$ vérifient les conditions

suivantes :

$i_o,\ i'_o \in \{1, r_o\}$; $j_o,\ j'_o \in \{r_o+1, s_o\}$; $k_o,\ k'_o \in \{s_o+1, n_o\}$

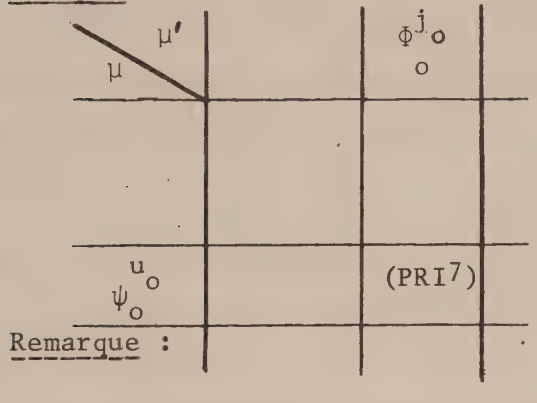
$t_o,\ t'_o \in \{0, r_o\}$; $u_o,\ u'_o \in \{r_o+1, s_o-1\}$; $v_o,\ v'_o \in \{s_o, n_o\}$

Il existe ainsi une bijection entre les cases du tableau et les différents types de couples formés de deux éléments distincts de $\{\Phi_o^1, \Phi_o^2, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1, \Omega_2\}$. Dans la case correspondant à un couple **(A,B) de**

$$\{\Phi_o^{i_o}, \Phi_o^{i'_o}, \Phi_o^{j_o}, \Phi_o^{j'_o}, \Phi_o^{k_o}, \Phi_o^{k'_o}, \Psi_o^{t_o}, \Psi_o^{t'_o}, \Psi_o^{u_o}, \Psi_o^{u'_o}, \Psi_o^{v_o}, \Psi_o^{v'_o}, \Omega_1, \Omega_2\}^2,$$

nous indiquerons le nom de la propriété qui nous permet d'affirmer que deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à A et B sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Exemple :



En effet, la propriété (PRI^7) nous permet d'affirmer que deux chaînes μ et μ' appartenant respectivement à $\Psi_o^{u_o}$ et $\Phi_o^{j_o}$, $r_o+1 \leq u_o \leq s_o-1$, $r_o+1 \leq j_o \leq s_o$, sont disjointes sauf peut-être en leurs extrémités.

Remarque :

Puisque nous nous intéressons à deux chaînes appartenant à deux éléments distincts de la partition $\{\Phi_o^1, \ldots, \Phi_o^{n_o}, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1\ \Omega_2\}$de M, nous négligeons les éléments diagonaux du tableau.

En outre, μ et μ' jouant des rôles symétriques, le tableau est symétrique et nous pouvons donc nous borner à l'étude des éléments surdiagonaux.

μ / μ'	$\Phi_o^{i_o}$	$\Phi_o^{i'_o}$	$\Phi_o^{j_o}$	$\Phi_o^{j'_o}$	$\Phi_o^{h_o}$	$\Phi_o^{h'_o}$	$\Psi_o^{t_o}$	$\Psi_o^{t'_o}$	$\Psi_o^{u_o}$	$\Psi_o^{u'_o}$	$\Psi_o^{v_o}$	$\Psi_o^{v'_o}$	Ω_1	Ω_2
$\Phi_o^{i_o}$		PR1	PR9	PR9	PR8	PR8	PR 4	PR4	PR9	PR9	PR8	PR8	PR2	PR8
$\Phi_o^{i'_o}$			PR9	PR9	PR8	PR8	PR4	PR4	PR9	PR9	PR8	PR8	PR2	PR8
$\Phi_o^{j_o}$				PR6	PR'9	PR'9	PR9	PR9	PR7	PR7	PR'9	PR'9	PR9	PR'9
$\Phi_o^{j'_o}$					PR'9	PR'9	PR9	PR9	PR7	PR7	PR'9	PR'9	PR9	PR'9
$\Phi_o^{h_o}$						PR'1	PR8	PR8	PR'9	PR'9	PR'4	PR'4	PR8	PR'2
$\Phi_o^{h'_o}$							PR8	PR8	PR'9	PR'9	PR'4	PR'4	PR8	PR'2
$\Psi_o^{t_o}$								PR3	PR9	PR9	PR8	PR8	PR4	PR8
$\Psi_o^{t'_o}$									PR9	PR9	PR8	PR8	PR4	PR8
$\Psi_o^{u_o}$										PR5	PR'9	PR'9	PR9	PR'9
$\Psi_o^{u'_o}$											PR'9	PR'9	PR9	PR'9
$\Psi_o^{v_o}$												PR'3	PR8	PR'4
$\Psi_o^{v'_o}$													PR8	PR'4
Ω_1														PR8
Ω_2														

Corollaire -

Deux chaînes quelconques μ et μ', appartenant à deux éléments distincts de la partition $\{\Phi_o^1 \ldots, \Phi_o^{n_o}, \ldots, \Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}, \Omega_1, \Omega_2\}$ de M, vérifient les trois conditions suivantes :

(i) $E(\mu \cap \mu') = \emptyset$

(ii) $|X(\mu \cap \mu')| \leq 2$

(iii) $X(\mu \cap \mu') \subset I = \{P_o, P_1\} \cup \{q_o^i \ / \ 0 \leq i \leq n_o\}$

Notations -

Considérant maintenant $\Phi_o^1, \ldots, \Phi_o^{n_o}$, $\Psi_o^o, \ldots, \Psi_o^{n_o}$, Ω_1 et Ω_2 comme des graphes (cf. convention page 202), posons

$$\bar{\Phi}_o^i = \begin{cases} \Phi_o^i \cup \gamma_1 \left[q_o^{i-1}, q_o^i\right] , & o \leq i \leq r_o \\ \Phi_o^i \cup \gamma \left[q_o^{i-1}, q_o^i\right] , & r_o+1 \leq i \leq s_o \\ \Phi_o^i \cup \gamma_2 \left[q_o^{i-1}, q_o^i\right] , & s_o+1 \leq i \leq n_o \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_o^i = \begin{cases} \Psi_o^i , & i \neq r_o , s_o \\ \Psi_o^i \cup \gamma_1 \left[P_o, x\right] , & i = r_o \\ \Psi_o^i \cup \gamma_2 \left[P_o, y\right] , & i = s_o \end{cases}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \gamma_1 \left[q_o^o, P_1\right]$$

$$\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \gamma_2 \left[q_o^{n_o}, P_1\right]$$

Avec ces notations nous pouvons écrire

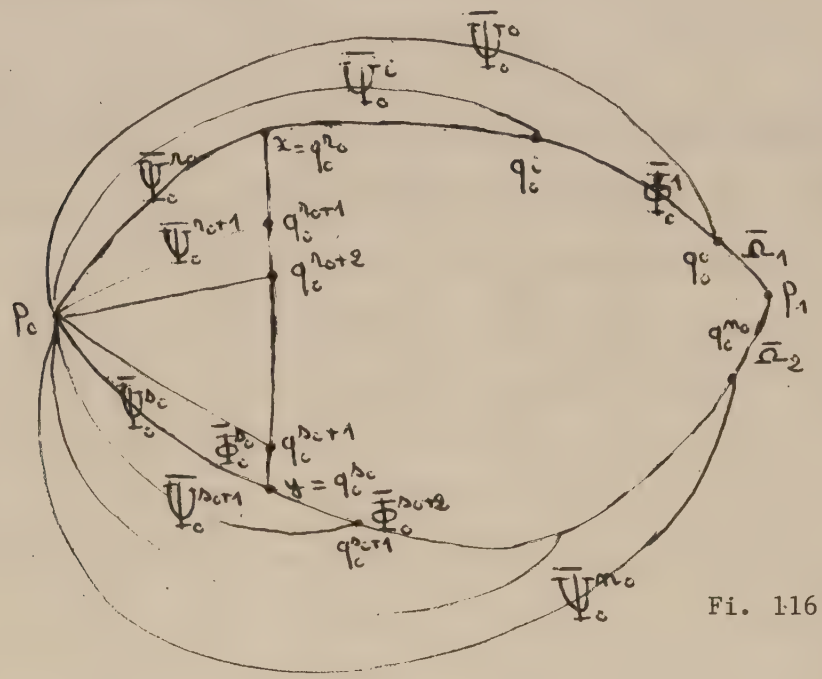
$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i\right) \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$$

G est la réunion de $k_G = n_o + (n_o+1) + 2 = 2\,n_o+3$ graphes.

D'après la définition de M, chacun de ces k_G graphes possède au moins deux sommets appartenant à la réunion des k_G-1 autres ; la propriété fondamentale et son corollaire nous permettent alors d'affirmer qu'il en possède exactement deux ; ces deux sommets sont éléments de I et seront appelés "extrémités" de ce graphe.

Ceci nous permet de représenter G par un graphe $\bar{G}$ dont l'ensemble de sommets est isomorphe à I (nous désignerons par le même symbole un sommet de G et l'élément de I qui lui est isomorphe) ; G possède k_G arêtes représentatives des k_G sous-graphes partiels dont la réunion forme G. Nous désignerons par le même symbole une arête de G et le sous-graphe partiel de G qu'elle représente.

Dans ces conditions, les mêmes symboles désignent d'une part les "extrémités" de l'un des k_G sous-graphes partiels de G, et d'autre part, les extrémités de l'arête de $\bar{G}$ qui est représentative de ce sous-graphe. Le graphe $\bar{G}$ est représenté à la figure 116.



Fi. 116

Remarque I^1 -

Rappelons que, puisque G est un bloc, il ne possède pas de sommets isolés et chacune des arêtes de ce graphe est contenue dans une chaîne élémentaire de G joignant P_o et P_1. Nous en déduisons que dans chacun des k_G graphes dont la réunion forme G, toute arête est contenue dans une chaîne élémentaire joignant les "extrémités" du graphe.

En outre, aucun de ces k_G graphes ne possède de sommets isolés.

Remarque I^2 -

Puisque G contient H, tout recouvrement de cardinal 2 de G est constitué

de deux sous-graphes partiels G'_1 et G'_2 vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

$$\text{(i)} \quad R'_1 \subset G'_1 \quad , \quad R'_2 \subset G'_2$$

$$\text{(ii)} \quad R_1 \subset G'_1 \quad , \quad R_2 \subset G'_2$$

Dans l'hypothèse où B est vide, cette remarque nous permet de poursuivre notre caractérisation en entreprenant deux études qui feront l'objet des paragraphes II et III.

Dans le paragraphe II nous supposeront qu'il existe un recouvrement de G formé de deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant (i).

Dans le paragraphe III, nous admettrons au contraire, que G admet un recouvrement de cardinal 2 vérifiant (ii).

Paragraphe II -

Considérons un recouvrement de G formé de deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R'_1 \subset G'_1$, $R'_2 \subset G'_2$.

Proposition II[1] -

Les graphes $G_1 = (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup \bar{\Omega}_1$ et

$G_2 = (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup \bar{\Omega}_2$ sont respectivement contenus dans

G'_1 et G'_2 .

La démonstration de cette proposition comporte six parties.

1) Considérons un graphe $\bar{\Phi}_o^i$ d'"extrémités" q_o^{i-1} et q_o^i , $1 \leq i \leq n_o$.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités q_o^{i-1} et q_o^i . Soient ψ_o^o et $\psi_o^{n_o}$ deux chaînes d'extrémités respectives P_o, q_o^o et P_o, $q_o^{n_o}$, et appartenant respectivement à $\bar{\Psi}_o^o$ et $\bar{\Psi}_o^{n_o}$.

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o,\ q_o^{i-1}]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i,\ p_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'.

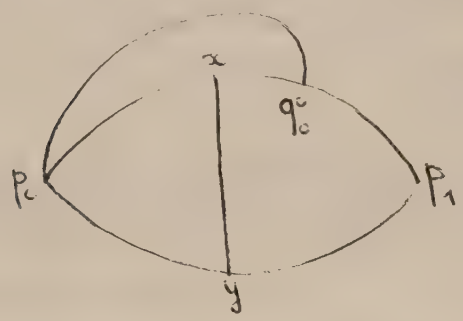


Fig. 117

La figure 117 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_1' ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1).

Nous en déduisons que $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ n'est pas contenue dans G_1' ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G_2'.

Considérons la chaîne élémentaire $\psi_o^{n_o} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{n_o}, q_o^i]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{i-1},\ p_1]}$ de G. La figure 118 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_2' ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\psi_o^{n_o} \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{n_o},\ q_o^i]} \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^{i-1},\ p_1]}$ et, à fortiori ν, est contenue dans G_1'.

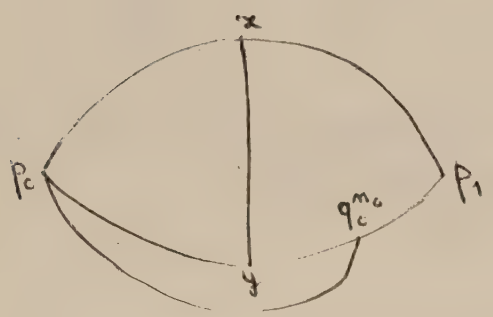


Fig. 118

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Phi}_o^i$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1' et G_2'. La remarque I^1 nous permet alors de conclure que, pour tout indice i, $1 \leq i \leq n_o$, $\bar{\Phi}_o^i$ est contenue dans G_1' et G_2' ; ces deux graphes contiennent donc $\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i$.

2) Considérons un graphe $\bar{\Psi}_o^i$ d'"extrémités" P_o et q_o^i, $1 \leq i \leq s_o$.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités

P_o et q_o^i. La chaîne $\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, P_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 119 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_1' (nous distinguons deux cas de figure, selon la valeur de i) ; Nous en déduisons que $\nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, P_1]}$ est contenue dans G_1'. Ce graphe contient donc le graphe $R_2' \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, P_1]}$ de la figure 120.

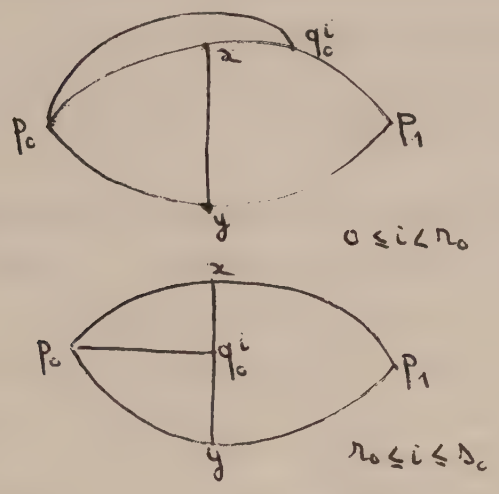
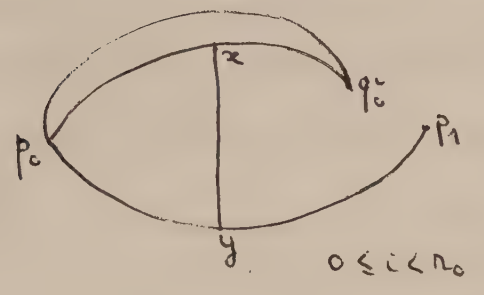


Fig. 119

La chaîne $\nu \cup (\gamma \cup \gamma_1'')_{[q_o^i, P_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' et G_2'.



La figure 121 représente le graphe formé par la réunion $R_2' \cup \nu \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, P_1]}$ et de cette chaîne (nous distinguons deux cas de figure selon la valeur de i). Ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\nu \cup (\gamma \cup \gamma_1'')_{[q_o^i, P_1]}$ n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne et, à fortiori ν, est donc contenue dans G_1'.

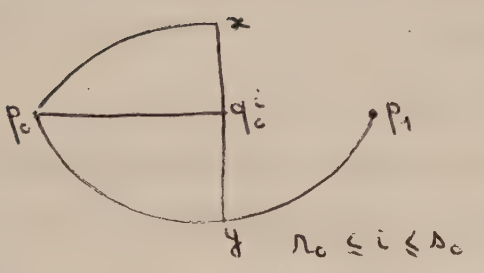


Fig. 120

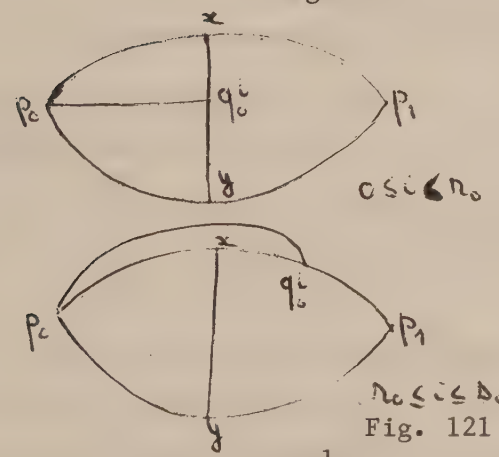


Fig. 121

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\psi}_o^i$, dont les extrémités sont les extrémités de ce graphe, est contenue dans G_1' et dans G_2'.

La remarque I^1 nous permet alors de conclure que, pour tout indice i, $o \leq i \leq s_o$, $\bar{\psi}_o^i$ est contenu dans G_1' et dans G_2'. γ_1 et γ_2 jouant les rôles symé-

triques, il en est de même de tout indice i, $r_o \leq i \leq n_o$. G'_1 et G'_2 contiennent donc $\bigcup_{i=o}^{n_o} \Psi_o^i$.

3) Considérons le graphe $\bar{\Omega}_1$ d'"extrémités" q_o^o et P_1.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités q_o^o et P_1. La chaîne $\gamma_{1\,[P_o, q_o^o]} \cup \nu$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2. La figure 122 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R'_2 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{1\,[P_o, q_o^o]} \cup \nu$ n'est pas contenue dans G'_2 ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G'_1.

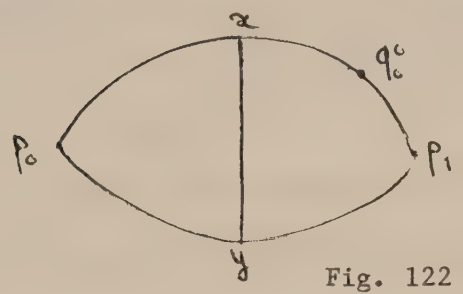


Fig. 122

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Omega}_1$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G'_1. La remarque I^1 nous permet alors de conclure que G'_1 contient $\bar{\Omega}_1$.

4) Considérons le graphe $\bar{\Omega}_2$ d'"extrémités" $q_o^{n_o}$ et P_1.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités $q_o^{n_o}$ et P_1. La chaîne $\gamma_{2\,[P_o, q_o^{n_o}]} \cup \nu$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2.

La figure 123 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R'_1 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{2\,[P_o, q_o^{n_o}]} \cup \nu$ n'est pas contenue dans G'_1 ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G'_2. Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Omega}_2$, dont les "extrémités" sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G'_2.

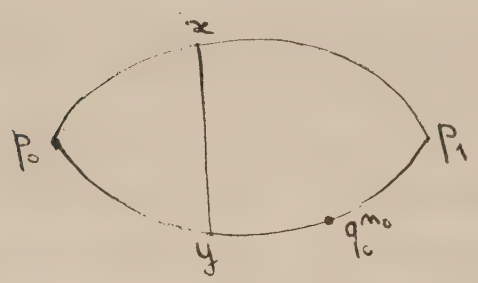


Fig. 123

La remarque I^1 nous permet alors de conclure que G_2' contient $\bar{\Omega}_2$.

Les six paragraphes précédents démontrent bien que G_1' et G_2' contiennent respectivement $G_1 = (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup \bar{\Omega}_1$ et $G_2 = (\bigcup_{i=o}^{n_o} \bar{\Psi}_o^i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_o} \bar{\Phi}_o^i) \cup \bar{\Omega}_2$.

Nous avons représenté le graphe G par le graphe $\bar{G}$ de la figure 116 ; G_1 et G_2 étant des sous-graphes partiels de G, nous pouvons les représenter par les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ de $\bar{G}$ correspondants (figure 124).

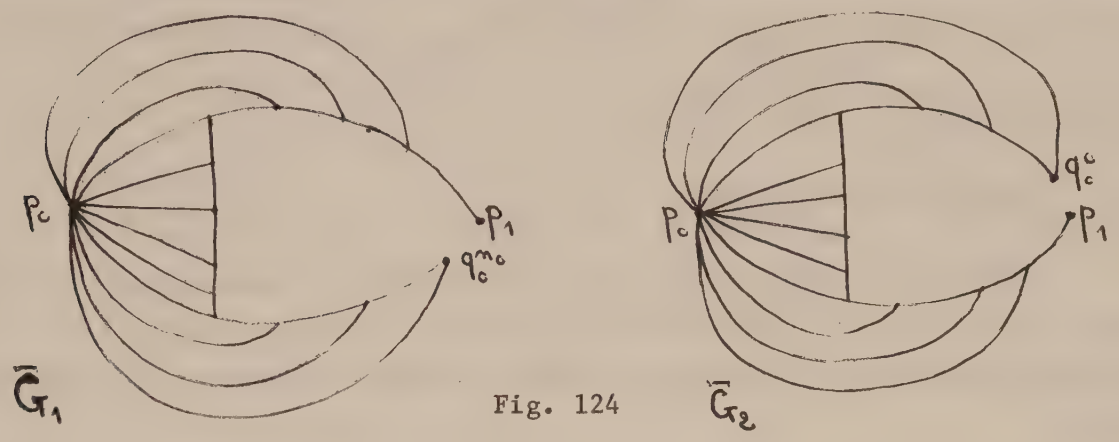


Fig. 124

G_1 (resp. G_2) est un sous-graphe partiel connexe de G_1' (resp. G_2') tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme, en outre, G_1' et G_2' sont SP (P_o, P_1), nous en déduisons qu'il en est de même de G_1 et de G_2.

Nous vérifions que $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ forment un recouvrement de $\bar{G}$ par deux graphes SP (P_o, P_1), ce qui nous permet d'affirmer que les deux graphes SP (P_o, P_1) G_1 et G_2 forment un recouvrement de G.

Proposition II^2 -

Le graphe G vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) pour tout indice i, $1 \leq i \leq n_o$, le sous-graphe partiel $\bar{\Phi}_o^i$ est SP (q_o^{i-1}, q_o^i)

(ii) pour tout indice i, $o \leq i \leq n_o$, le sous-graphe partiel $\bar{\Psi}_o^i$ est SP (P_o, q_o^i)

(iii) $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) est SP (q_o^o, P_1) (resp. SP $(q_o^{n_o}, P_1)$).

Démontrons la propriété (i). Soit ψ_o^o une chaîne de $\bar{\Psi}_o^o$ d'extrémités P_o et q_o^o.

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]} \cup \bar{\Phi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ est un sous-graphe partiel connexe de G_1, tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme G_1 est SP (P_o, P_1), ce sous-graphe partiel l'est aussi. Mais, puisque $\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]} \cup \bar{\Phi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ est la connexion en série des deux chaînes élémentaires

$\psi_o^o \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^o, q_o^{i-1}]}$, $(\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ et du graphe $\bar{\Phi}_o^i$, nous en déduisons que $\bar{\Phi}_o^i$ est SP (q_o^{i-1}, q_o^i).

Démontrons la propriété (ii).

$\bar{\Psi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ est un sous-graphe partiel connexe de G_1, tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme G_1 est SP (P_o, P_1) ce sous-graphe partiel l'est aussi. Mais, puisque $\bar{\Psi}_o^i \cup (\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ est la connexion en série de $\bar{\Psi}_o^i$ et de la chaîne $(\gamma_1'' \cup \gamma \cup \gamma_2'')_{[q_o^i, p_1]}$ nous en déduisons que $\bar{\Psi}_o^i$ est SP (P_o, q_o^i).

Démontrons enfin la propriété (iii).

$\gamma_1{}_{[p_o, q_o^o]} \cup \bar{\Omega}_1$ (resp. $\gamma_2{}_{[p_o, q_o^{n_o}]} \cup \Omega_2$) est un sous-graphe partiel de G_1 (resp. G_2), tel que, par chacune de ses arêtes, il passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme G_1 et G_2 sont SP (P_o, P_1), ces deux sous-graphes partiels sont SP (P_o, P_1). Mais, puisque $\gamma_1{}_{[p_o, q_o^o]} \cup \bar{\Omega}_1$ (resp. $\gamma_2{}_{[p_o, q_o^{n_o}]} \cup \bar{\Omega}_2$) est la connexion en série de la chaîne $\gamma_1{}_{[p_o, q_o^o]}$ (resp. $\gamma_2{}_{[p_o, q_o^{n_o}]}$) et du graphe $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$), nous en déduisons que $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) est SP (q_o^o, P_1) (resp. SP $(q_o^{n_o}, P_1)$).

L'étude de ce paragraphe II nous conduit à énoncer le théorème suivant :

Théorème II[1] -
==========

Si B est vide et qu'il existe un recouvrement de G par deux graphes SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R'_1 \subset G'_1$, $R'_2 \subset G'_2$, alors il existe des entiers r_o, s_o, n_o $(o \leq r_o < s_o \leq n_o)$ tels que G soit représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 116.
Cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G. Nous pouvons exhiber un recouvrement $\{G_1, G_2\}$ de G par deux sous-graphes partiels ; à G_1 et G_2 correspondent dans la représentation ci-dessus, les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ de $\bar{G}$ représentés à la figure 124.
Réciproquement il est clair qu'un graphe G vérifiant ces conditions est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

Paragraphe III -
==========

Comme nous l'avons annoncé, dans ce paragraphe nous supposons qu'il existe un recouvrement de G formé de deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1) contenant respectivement R_1 et R_2. Soit, $\{G'_1, G'_2\}$ un tel recouvrement ; G'_1 contient R_1 et G'_2 contient R_2.

En vertu du lemme 1 de la page 189, nous savons que l'existence d'un tel recouvrement implique que A soit vide. Comme B est vide, nous en déduisons que $r_o = o$, $s_o = n_o = 1$, $q_o^o = x$, $q_o^{o} = q_o^{n_o} = y$ et $G = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^o \cup \bar{\Psi}_o^1 \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.

G est la réunion de cinq graphes ; il est représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 125 ; chaque arête de $\bar{G}$ représente l'un des cinq graphes dont la réunion forme G.

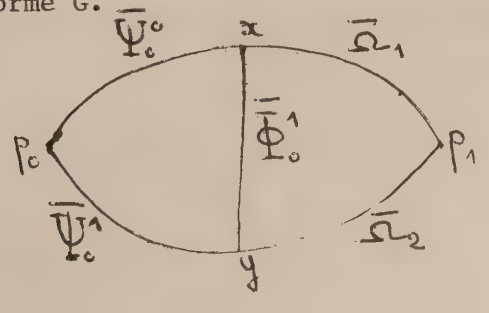


Fig. 125

Proposition III[1] -

[Les graphes $G_1 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^o \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ et $G_2 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^1 \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ sont respectivement contenus dans G_1' et G_2'.

La démonstration de cette proposition comporte quatre parties :

1) Considérons le graphe $\bar{\Phi}_o^1$ d'"extrémités" x et y.

Dans ce graphe, soit ν , une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités x et y. $\gamma_{1[P_o,x]} \cup \nu \cup \gamma_{2[y,P_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 126 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_2 ; ce graphe n'est pas $SP(P_o, P_1)$. Nous en déduisons que $\gamma_{1[P_o,x]} \cup \nu \cup \gamma_{2[y,P_1]}$ n'est pas contenue dans G_2' ; cette chaîne, et à fortiori ν , est donc contenue dans G_1'.

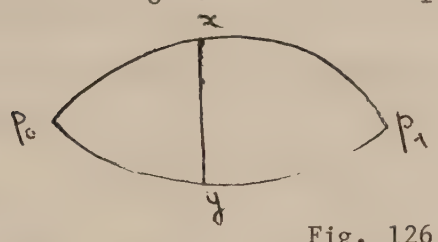


Fig. 126

$\gamma_{2[P_o,y]} \cup \nu \cup \gamma_{2[y,P_1]}$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 127 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne de P_1 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_{2[P_o,y]} \cup \nu \cup \gamma_{2[y,P_1]}$ n'est pas contenue dans G_1' ; cette chaîne, et à fortiori ν , est donc contenue dans G_2'.

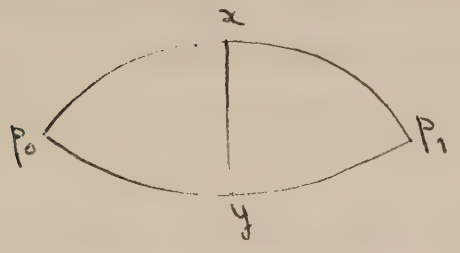


Fig. 127

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne de $\bar{\Phi}_o^1$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1' et dans G_2'.

La remarque I[1] nous permet alors de conclure que $\bar{\Phi}_o^1$ est contenu dans G_1' et G_2'.

2) Considérons le graphe $\bar{\Omega}_1$ d'"extrémités" x et P_1.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités x et P_1. $\gamma_1[P_o,x] \cup \nu$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2. La figure 128 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_2. ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_1[P_o,x] \cup \nu$ n'est pas contenue dans G'_2 ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G'_1.

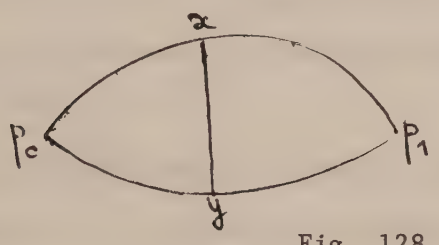


Fig. 128

$\gamma_2[P_o,y] \cup \gamma \cup \nu$ ... est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2. La figure 129 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_1 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\gamma_2[P_o,y] \cup \gamma \cup \nu$ n'est pas contenue dans G'_1 ; cette chaîne, et à fortiori ν, est donc contenue dans G'_2.

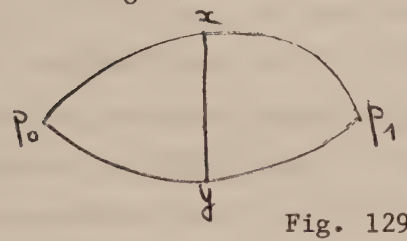


Fig. 129

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne élémentaire de $\bar{\Omega}_1$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G'_1 et G'_2. La remarque I^1 nous permet alors de conclure que G'_1 et G'_2 contiennent $\bar{\Omega}_1$.

γ_1 et γ_2 jouant des rôles symétriques, nous démontrerions de manière analogue que G'_1 et G'_2 contiennent $\bar{\Omega}_2$.

3) Considérons le graphe $\bar{\Psi}^o_o$ d'"extrémités" P_o et x.

Dans ce graphe, soit ν une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités P_o et x. $\nu \cup \gamma_1[x,P_1]$ est une chaîne élémentaire de G d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G'_1 ou G'_2. La figure 130 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_2 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\nu \cup \gamma_1[x,P_1]$ n'est pas contenue dans G'_2 ; cette chaîne et, à fortiori ν, est donc contenue dans G'_1.

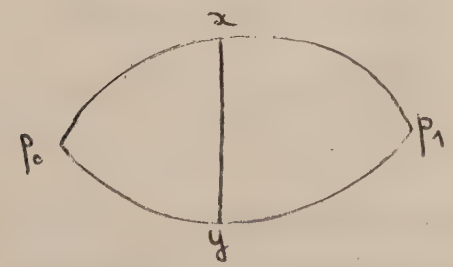


Fig. 130

Nous avons ainsi démontré que toute chaîne élémentaire de $\bar{\Psi}_o^o$, dont les extrémités sont les "extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_1'. La remarque I^1 nous permet alors de conclure que G_1' contient $\bar{\Psi}_o^o$.

4) Considérons le graphe $\bar{\Psi}_o^1$ d'"extrémités" P_o et y.

Dans ce graphe, soit ν , une chaîne élémentaire quelconque d'extrémités P_o et y.

$\nu \cup \gamma_2[y,p_1]$ est une chaîne élémentaire de G, d'extrémités P_o et P_1 ; elle est donc contenue dans G_1' ou G_2'. La figure 131 représente le graphe formé par la réunion de cette chaîne et de R_1 ; ce graphe n'est pas SP (P_o, P_1). Nous en déduisons que $\nu \cup \gamma_2[y,p_1]$ n'est pas contenue dans G_1' ; cette chaîne, et à fortiori ν , est donc contenue dans G_2'. Nous avons ainsi démontré que toute chaîne élémentaire de $\bar{\Psi}_o^1$ dont les extrémités sont les"extrémités" de ce graphe, est contenue dans G_2'.

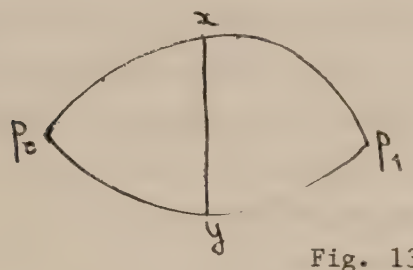


Fig. 131

La remarque I^1 nous permet alors de conclure que G_2' contient $\bar{\Psi}_o^1$.

Les quatre paragraphes précédents démontrent bien que G_1' et G_2' contiennent respectivement $G_1 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^o \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ et $G_2 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^1 \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.

Nous avons représenté G par le graphe $\bar{G}$ de la figure 125 ; G_1 et G_2 étant des sous-graphes partiels de G, nous pouvons les représenter par les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ de G correspondants (cf. figure 132).

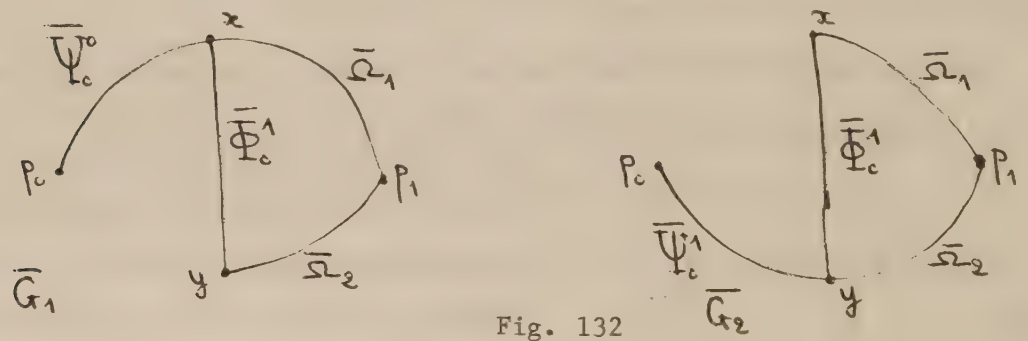


Fig. 132

G_1 (resp. G_2) est un sous-graphe partiel connexe de G_1' (resp. G_2'), tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1.

Comme, en outre, G'_1 et G'_2 sont SP (P_o, P_1), nous en déduisons qu'il en est de même de G_1 et de G_2.

Nous vérifions que $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ forment un recouvrement de $\bar{G}$ par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1), ce qui permet d'affirmer que les deux graphes SP (P_o, P_1) G_1 et G_2 forment un recouvrement de G.

Proposition III^2 -

Le graphe G vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) Le sous-graphe partiel $\bar{\Phi}_o^1$ est SP (x, y)
(ii) $\bar{\Psi}_o^o$ et $\bar{\Psi}_o^1$ sont respectivement SP (P_o, x) et SP (P_o, y)
(iii) $\bar{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_2$ sont respectivement SP (x, P_1) et SP (y, P_1).

Démontrons la propriété (i). $\gamma_1[p_o,x] \cup \bar{\Phi}_o^1 \cup \gamma_2[y,p_1]$ est un sous-graphe partiel connexe de G_1, tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme G_1 est SP (P_o, P_1), ce sous-graphe partiel l'est aussi. Mais, puisque $\gamma_1[p_o,x] \cup \bar{\Phi}_o^1 \cup \gamma_2[y,p_1]$ est la connexion en série des deux chaînes $\gamma_1[p_o,x]$, $\gamma_2[y,p_1]$ et du graphe $\bar{\Phi}_o^1$, nous en déduisons que $\bar{\Phi}_o^1$ est SP (x,y).

Démontrons la propriété (ii). $\bar{\Psi}_o^o \cup \gamma_1[x,p_1]$ (resp. $\bar{\Psi}_o^1 \cup \gamma_2[y,p_1]$) est un sous-graphe partiel connexe de G_1 (resp. de G_2), tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme G_1 et G_2 sont SP (P_o, P_1), il en est de même de $\bar{\Psi}_o^o \cup \gamma_1[x,p_1]$ et de $\bar{\Psi}_o^1 \cup \gamma_2[y,p_1]$. Mais, puisque $\bar{\Psi}_o^o \cup \gamma_1[x,p_1]$ (resp. $\bar{\Psi}_o^1 \cup \gamma_2[y,p_1]$) est la connexion en série du graphe $\bar{\Psi}_o^o$ (resp. $\bar{\Psi}_o^1$) et de la chaîne $\gamma_1[x,p_1]$ (resp. $\gamma_2[y,p_1]$), nous en déduisons que $\bar{\Psi}_o^o$ (resp. $\bar{\Psi}_o^1$) est SP (P_o, x) (resp. SP (P_o, y)).

Démontrons la propriété (iii). $\gamma_1[p_o,x] \cup \bar{\Omega}_1$ (resp. $\gamma_2[p_o,y] \cup \bar{\Omega}_2$) est un sous-graphe partiel connexe de G_1 (resp. de G_2), tel que par chacune de ses arêtes passe une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. Comme G_1 et G_2 sont SP (P_o, P_1), il en est de même de $\gamma_1[p_o,x] \cup \bar{\Omega}_1$ et de $\gamma_2[p_o,y] \cup \bar{\Omega}_2$. Mais, puisque $\gamma_1[p_o,x] \cup \bar{\Omega}_1$ (resp. $\gamma_2[p_o,y] \cup \bar{\Omega}_2$) est la connexion en série de la chaîne $\gamma_1[p_o,x]$ (resp. $\gamma_2[p_o,y]$) et du graphe $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$), nous en déduisons que $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) est SP (x, P_1) (resp. SP (y, P_1)).

Remarque -

La proposition précédente nous permet d'affirmer que les sous-graphes partiels $G_3 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^o \cup \bar{\Psi}_o^1 \cup \bar{\Omega}_1$ et $G_4 = \bar{\Phi}_o^1 \cup \bar{\Psi}_o^o \cup \bar{\Psi}_o^1 \cup \bar{\Omega}_2$ de G sont SP (P_o, P_1). Nous pouvons les représenter par les deux sous-graphes partiels de $\bar{G}_3$ et $\bar{G}_4$ de $\bar{G}$ correspondants (cf. figure 133).

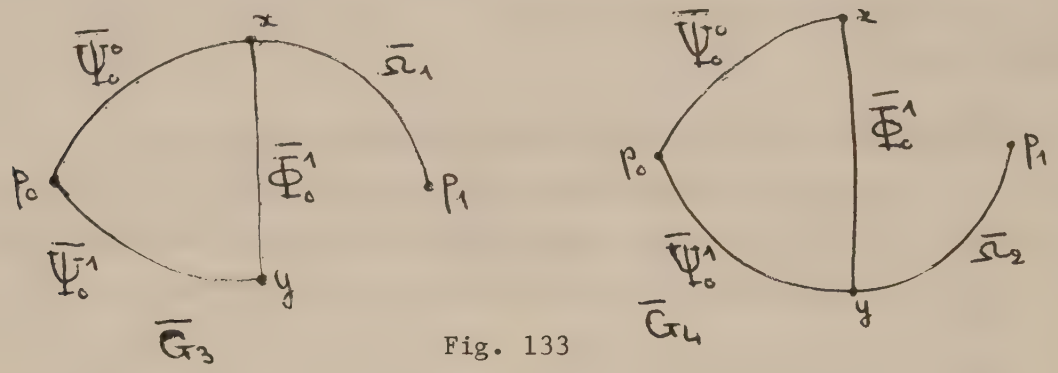


Fig. 133

Nous vérifions que $\bar{G}_3$ et $\bar{G}_4$ forment un recouvrement de $\bar{G}$ par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1), ce qui permet d'affirmer que les deux graphes SP (P_o, P_1) G_3 et G_4 forment un recouvrement de G.

L'étude de ce paragraphe III nous conduit à énoncer le théorème suivant :

Théorème III^1 -

Si B est vide et qu'il existe un recouvrement de G par deux graphes SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R_1 \subset G'_1$, $R_2 \subset G'_2$, alors G est représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 125.

Cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G. Nous pouvons exhiber deux recouvrements $\{G_1, G_2\}$ et $\{G_3, G_4\}$ de G par deux sous-graphes partiels ; à G_1, G_2, G_3 et G_4 correspondent, dans la représentation ci-dessus, respectivement les sous-graphes partiels $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ représentés aux figures 132 et 133.

Réciproquement il est clair qu'un graphe G vérifiant ces conditions est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

Paragraphe IV -
==========

Dans ce paragraphe, nous donnons une caractérisation de G, liée à l'hypothèse $A = \emptyset$.

P_o et P_1 jouant des rôles symétriques, il en est de même de A et B.

Par des raisonnements analogues à ceux que nous avons utilisés dans les paragraphes II et III, nous établirions donc les deux théorèmes suivants.

Théorème IV[1] -

Si A est vide et qu'il existe un recouvrement de G par deux graphes SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R_1 \subset G'_1$, $R_2 \subset G'_2$, alors il existe des entiers r_1, s_1, n_1 $(o \leq r_1 < s_1 \leq n_1)$ tels que G soit représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 134.

Cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G. Nous pouvons exhiber un recouvrement $\{G_3, G_4\}$ de G par deux sous-graphes partiels ; à G_3 et G_4 correspondent, dans la représentation ci-dessus, les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_3$ et $\bar{G}_4$ de G représentés à la figure 135.

Réciproquement il est clair qu'un graphe G vérifiant ces conditions est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

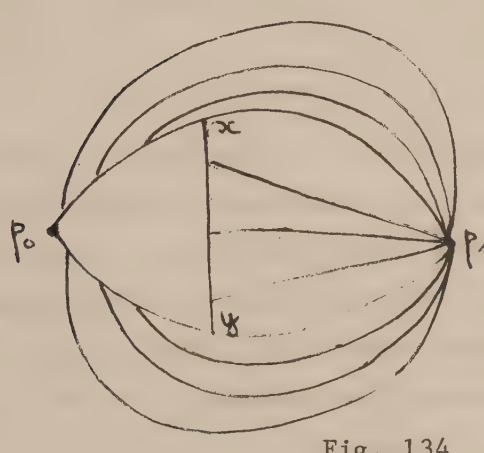
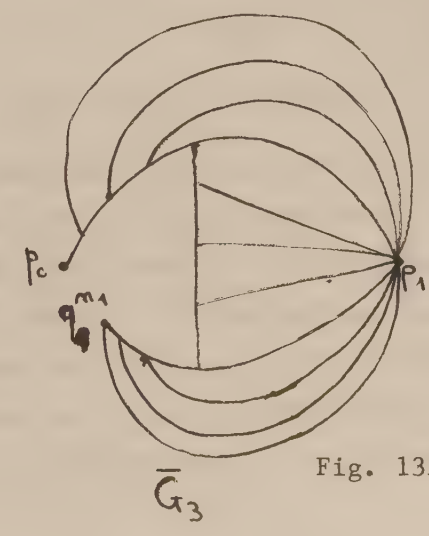


Fig. 134



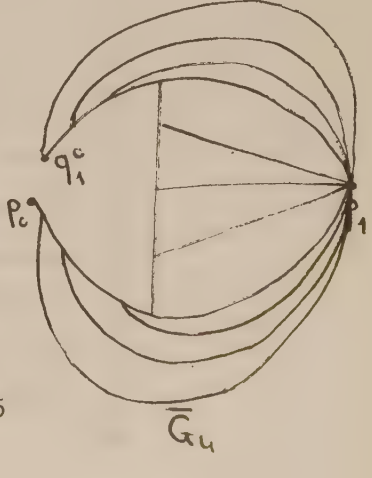


Fig. 135

Théorème IV^2 -

Si A est vide et qu'il existe un recouvrement de G par deux graphes SP (P_o, P_1) G'_1 et G'_2 vérifiant $R'_1 \subset G'_1$, $R'_2 \subset G'_2$, alors G est représentable par le graphe $\bar{G}$ de la figure 136.

Cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G. Nous pouvons exhiber deux recouvrement $\{G_1, G_2\}$ et $\{G_3, G_4\}$ de G par deux sous-graphes partiels ; à G_1, G_2, G_3, G_4 correspondent, dans la représentation ci-dessus, respectivement, les sous-graphes partiels $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ représentés aux figures 132 et 133.

Réciproquement il est clair qu'un graphe G vérifiant ces conditions est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

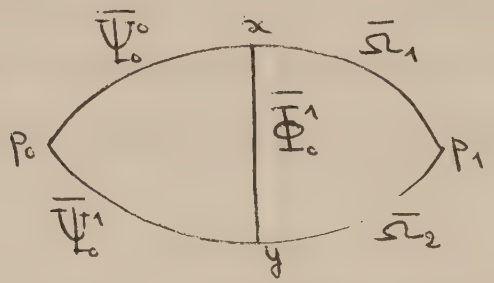


Fig. 136

Théorème fondamental -

Si l'indice n, défini à la page 138, est égal à 1, alors il existe des entiers r_o, r_1, s_o, s_1, n_o, n_1 $(0 \leq r_o < s_o \leq n_o$; $o \leq r_1 < s_1 \leq n_1)$ tels que :

1) L'un au moins des deux entiers n_o et n_1 soit égal à 1.

2) Si n_1 égale 1, G soit représentable par le graphe de la figure 116 ; cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u,v) de G. Nous pouvons, en outre exhiber un recouvrement $\{G_1, G_2\}$ de G par deux sous-graphes partiels de G; à G_1 et G_2 correspondent, dans la représentation ci-dessus, les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ représentés à la figure 124.

3) Si n_o égale 1, G est représentable par le graphe de la figure 134 ; cette représentation de G est telle que tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G et que toute arête de $\bar{G}$ d'extrémités u et v représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G. Nous pouvons, en outre, exhiber un recouvrement $\{G_3, G_4\}$ de G par deux sous-graphes partiels de G ; à G_3 et G_4 correspondant,dans la représentation ci-dessus, les deux sous-graphes partiels $\bar{G}_3$ et $\bar{G}_4$ représentés à la figure 135.

Réciproquement, un graphe G vérifiant ces conditions est un bloc vérifiant $\sigma(G) = 2$ et dont $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation.

Ce théorème et sa réciproque n'est qu'une autre formulation des théorèmes II^1 , III^1, IV^1 et IV^2 et de leurs réciproques.

- V - CINQUIEME PARTIE

Soit un graphe Γ et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe.

Définition 1 -

Appelons T_1 le graphe de la figure 137, nous dirons que Γ est de type 1 s'il existe des entiers r_o, s_o, n_o, r_1, s_1, n_1 ($o \leq r_o < s_o \leq n_o$; $o \leq r_1 < s_1 \leq n_1$) et un isomorphisme I_1 de graphes, tels que $I_1(\Gamma) = T_1$, $I_1(P_o) = P_o$, $I_1(P_1) = P_1$.

Proposition 1 -

Si Γ est de type 1, les deux sous-graphes partiels de Γ, dont les images par I_1 sont les deux sous-graphes partiels de T_1 représentés à la figure 138, forment un recouvrement de Γ.

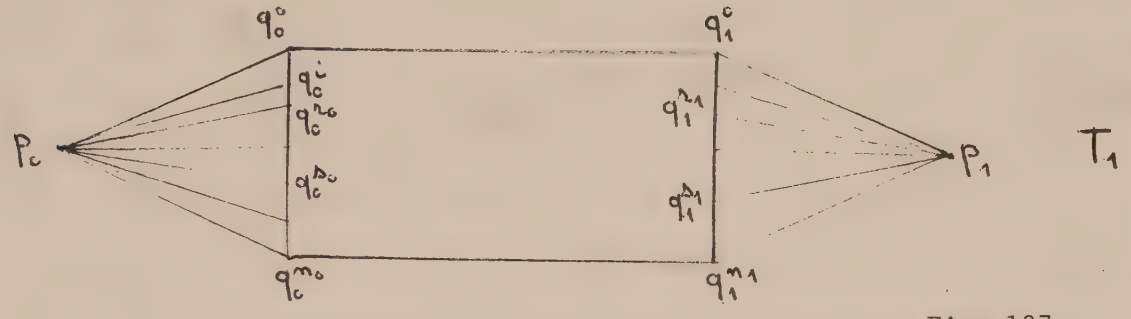


Fig. 137

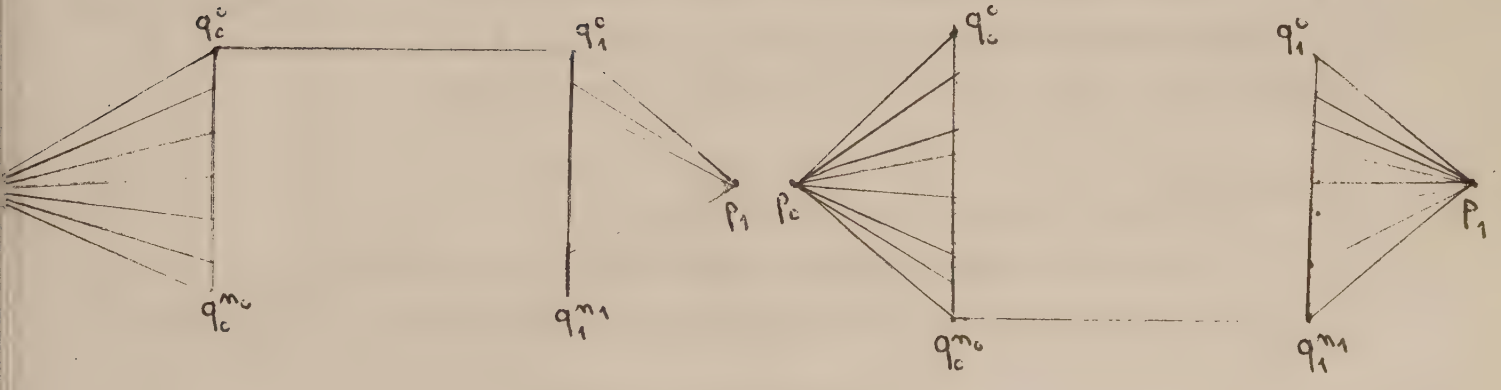


Fig. 138

Définition 2 -

Appelons T_2 le graphe de la figure 139. Nous dirons que Γ est de type 2 s'il existe des entiers r_o, s_o, n_o ($o \leq r_o < s_o \leq n_o$) et un isomorphisme de graphes I_2 tels que $I_2(\Gamma) = T_2$, $I_2(P_o) = P_o$, $I_2(P_1) = P_1$.

Proposition 2 -

Si Γ est de type 2, les deux sous-graphes partiels de Γ dont les images par I_2 sont les deux sous-graphes partiels de T_2 représentés à la figure 140, forment un recouvrement de Γ.

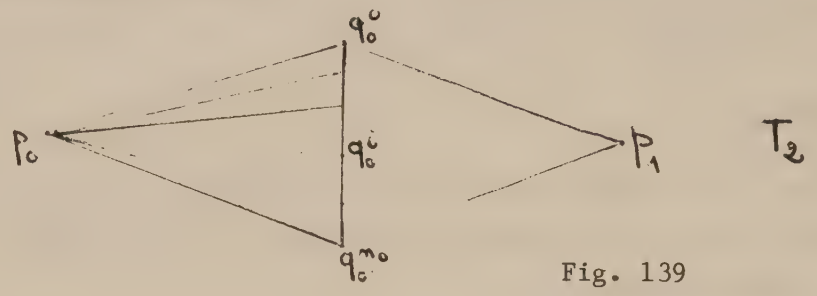


Fig. 139

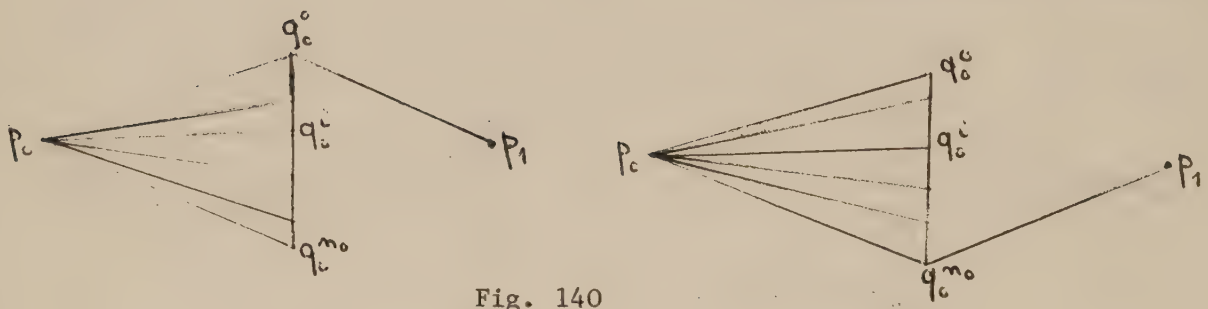


Fig. 140

Définition 3 -

Appelons T_3 le graphe de la figure 141. Nous dirons que Γ est de type 3 s'il existe des entiers r_1, s_1, n_1 ($o \leq r_1 < s_1 \leq n_1$) et un isomorphisme de graphes I_3 tels que $I_3(\Gamma) = T_3$, $I_3(P_o) = P_o$, $I_3(P_1) = P_1$.

Proposition 3 -

Si Γ est de type 3, les deux sous-graphes partiels de Γ, dont les images par I_3 sont les deux sous-graphes partiels de I_3 représentés à la figure 142, forment un recouvrement de Γ.

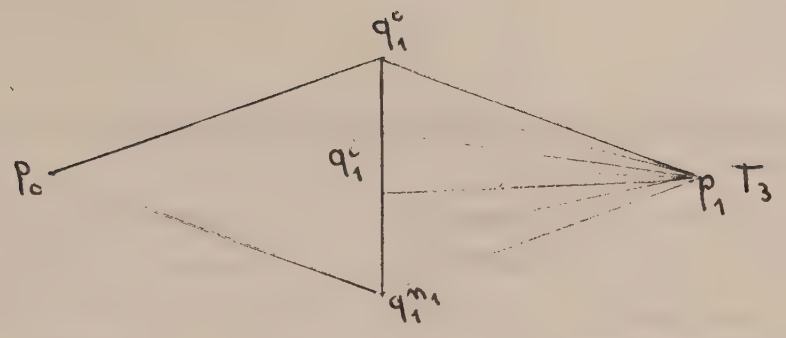
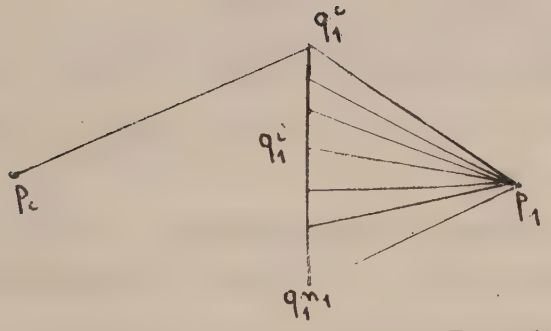


Fig. 141



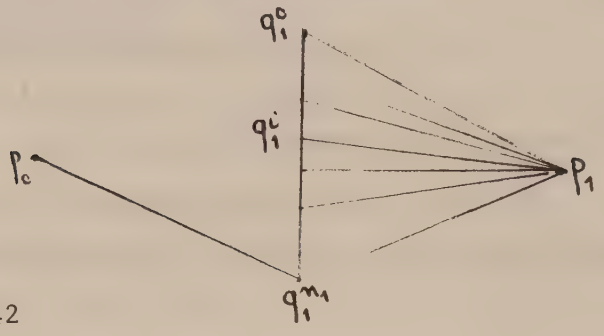


Fig. 142

Théorème de caractérisation -
==========

1) Un graphe G vérifie les conditions :

(i) P_o et P_1 sont deux sommets de G

(ii) G est un bloc

(iii) $\sigma(G) = \sigma(P_o, P_1)$ (G) = 2

(iu) $\{P_o, P_1\}$ n'est pas ensemble d'articulation de G.

Si et seulement s'il existe une représentation de G par un graphe $\bar{G}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) tout sommet w de $\bar{G}$ représente le sommet w de G

b) Toute arête (u, v) de $\bar{G}$ représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de G.

c) $\bar{G}$ est de type 1, 2 ou 3.

2) Si G vérifie ces conditions, nous pouvons exhiber un recouvrement de G par deux sous-graphes partiels SP (P_o, P_1)

La première partie de ce théorème n'est qu'une autre formalisation des deux théorèmes fondamentaux énoncés aux pages 186 et 228 et de leurs réciproques.

La démonstration de la seconde partie est non moins évidente.

En effet, si G est représentable par un graphe $\bar{G}$ de type 1, la proposition 1 fournit un recouvrement de $\bar{G}$ par deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$. Il est clair,alors, que dans la représentation considérée, les sous-graphes partiels G_1 et G_2 de G correspondants à $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$, forment un recouvrement de G.

De même, si G est représentable par un graphe $\bar{G}$ de type 2 (resp. de type 3), la proposition 2 (resp. la proposition 3) fournit un recouvrement de $\bar{G}$ par deux sous-graphes partiels $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$.

Il est clair, alors, que dans la représentation considérée, les sous-graphes partiels G_1 et G_2 de G correspondants à $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ forment un recouvrement de G.

CARACTERISATION DES GRAPHES D'INVARIANT

σ EGAL A 2

Nous nous proposons de généraliser l'étude précédente en caractérisant tous les graphes d'invariant σ égal à 2.

Définition -

Etant donné un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe, nous noterons G (P_o, P_1) le sous-graphe partiel de G formé de la réunion de toutes les chaînes élémentaires de G d'extrémités P_o et P_1.

Convention -

Soit un graphe Γ et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe.

Nous dirons qu'il est de type O s'il existe un isomorphisme de graphes I_o tel que :

1) $I_o(\Gamma)$ soit égal à K_2

2) $I_o(P_o) = P_o$; $I_o(P_1) = P_1$

Remarque -

Dans le graphe G (P_o, P_1), tout sommet et toute arête sont contenus dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1. D'après l'étude du chapitre V nous savons que $\sigma(P_o, P_1)\,(G(P_o, P_1)) = \sigma(P_o, P_1)\,(G)$.

Théorème de caractérisation -

Soit un graphe G et deux sommets P_o et P_1 de ce graphe.
$\sigma(P_o, P_1) = 2$ si et seulement si il existe une représentation de G (P_o, P_1) par un graphe $\overline{G\,(P_o, P_1)}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) Tout sommet w de $\overline{G\ (P_o, P_1)}$ représente le sommet w de $G\ (P_o, P_1)$.

b) Toute arête u, v de $\overline{G\ (P_o, P_1)}$ représente un sous-graphe partiel SP (u, v) de $G\ (P_o, P_1)$.

c) $\overline{G\ (P_o, P_1)}$ peut s'obtenir en opérant des connexions en série et en parallèle successives portant sur un ensemble $\mathcal{G}$ de graphes de type 0, 1, 2 et 3, tout en respectant les règles suivantes :

(i) Lorsqu'on opère une connexion en série de n graphes, n-1 d'entre eux sont de type 0.

(ii) $\mathcal{G}$ contient au moins un graphe qui ne soit pas de type 0.

Démonstration de la condition nécessaire :

Par hypothèse $\sigma(P_o, P_1)\ (G\ (P_o, P_1)\ ) = \sigma(G) = 2$. Distinguons deux cas.

Premier cas -

Nous admettons que $G\ (P_o, P_1)$ est un bloc n'admettant pas $\{P_o, P_1\}$ comme ensemble d'articulation.

D'après le théorème de caractérisation établi dans l'étude précédente nous savons qu'il existe une représentation de $G(P_o, P_1)$ par un graphe $\bar{G}$ de type 1, 2 ou 3 vérifiant les propriétés a) et b). La condition nécessaire est donc démontrée dans ce cas.

Deuxième cas -

Nous admettons que si $G\ (P_o, P_1)$ est un bloc, alors il admet $\{P_o, P_1\}$ comme ensemble d'articulation.

Nous allons raisonner par induction en supposant que tout graphe H, vérifiant $\sigma(P_o, P_1)\ (H) = 2$; $H\ (P_o, P_1) = H$; $|E\ (H)| < |E\ (G\ (P_o, P_1)\ )|$, est représentable par un graphe $\bar{H}$ possédant les propriétés a), b) etc).

(1) Supposons que $G(P_o, P_1)$ soit un bloc ; $\{P_o, P_1\}$ est alors ensemble d'articulation de G. Ceci signifie que G est la connexion en parallèle relativement à P_o et P_1 de deux graphes G_1 et G_2, ce que nous notons $G(P_o, P_1) = G_1 \underset{(P_o,P_1)}{P} G_2$. Puisque dans $G(P_o, P_1)$ tout sommet et toute arête sont contenus dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1, il en est de même dans les graphes G_1 et G_2, ce qui implique $G_1(P_o, P_1) = G_1$ et $G_2(P_o, P_1) = G_2$.

Comme $G(P_o, P_1) = G_1 \underset{(P_o,P_1)}{P} G_2$, nous pouvons écrire $|E(G_1)| < |E(G)|$ et $|E(G_2)| < |E(G)|$. Nous en déduisons que G_1 et G_2 sont représentables par deux graphes $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ possédant les propriétés a), b),c). Le graphe $\bar{G}$ obtenu en connectant en parallèle les deux graphes G_1 et G_2 fournit alors une représentation de $G(P_o, P_1)$ qui vérifie bien les propriétés a), b) et c).

(2) Supposons que $G(P_o, P_1)$ ne soit pas un bloc. Puisque dans $G(P_o, P_1)$ tout sommet et toute arête sont contenus dans une chaîne élémentaire d'extrémités P_o et P_1, $G(P_o, P_1)$ est la connexion en série de k graphes $G_1, G_2, \ldots, G_k$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $G(P_o, P_1) = G_1 \; S \; G_2 \; S \; \ldots \; S \; G_k$

2) Pour tout indice i, $1 \leq i \leq k$, $G_i(P_o, P_1) = G_i$

3) $|E(G_i(P_o, P_1))| = |E(G_i)| < |E(G(P_o, P_1))|$

4) Il existe un indice i_o, $1 \leq i_o \leq k$, tel que $\sigma(G_{i_o}) = 2$

5) Pour tout indice i , $1 \leq i \leq k$, $i \neq i_o$, $\sigma(G_i) = 1$.

Nous en déduisons que G_{i_o} est représentable par un graphe $\bar{G}_{i_o}$ possédant les propriétés a), b), c) et que pour tout indice i, $1 \leq i \leq k$, $i \neq i_o$, G_i est représentable par un graphe $\bar{G}_i$ isomorphe à K_2 (et donc de type 0) vérifiant les propriétés a) et b).

Le graphe $\bar{G} = \bar{G}_1 \; S \; \bar{G}_2 \; \ldots \; S \; \bar{G}_{i_o} \; S \; \ldots \; \bar{G}_k$, obtenu en connectant en série les graphes $\bar{G}_1, \ldots \bar{G}_{i_o}, \ldots, \bar{G}_k$ fournit alors une représentation de $G(P_o, P_1)$ qui vérifie bien les propriétés a) et b).

La condition suffisante de ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 3 du chapitre V.

BIBLIOGRAPHIE

(1) ELGOT-WRIGHT — Series-parallel Graphs and Lattices. Duke Math. J. V. 26 - 1959 - P. 325.

(2) BENZAKEN — Treillis série-parallèles. Académie des Sciences, 1965 - Tome 260.

(3) KUNTZMANN — Algèbre de Boole. Dunod, 1968.

(4) BERGE — Graphes et hypergraphes. Dunod, 1970.

(5) DUFFIN — Topology of Series-parallel Networks. J. Math. Anal. Appl. - V. 10 - 1965 - P. 303.

(6) SESHU-REDD — Linear Graphs and Electrical Networks. Addison Wesley.

(7) CHEN — Applied Graph Theory.

(8) BRYLAWSKI — A combinatorial Model for Series-parallel Networks. Trans. Amer. Math. Soc. - 154 - 1971.

(9) CANLITZ-RINDER — The Number of Labelled Two-terminal Series-parallel Networks. Duke Math. J. V. 23 - 1956 - P. 435.

(10) FOSTER — The Number of SP Networks - 646 - 1952. Proc. Int. Congr. Math., I.